

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VI, HEFT 4

MIT 15 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 8. SEPTEMBER 1952)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1952

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

*an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5*

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band VI, Heft 4

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten

	Seite
K. Federhofer , Stabilität der Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke	277
F. Vitovec , Über die athermische Plastizität und die Kerbwirkung im Raumgitter. (Mit 5 Textabbildungen)	288
W. Embacher , Einfaches Gerät zur mechanischen Auswertung von Vermessungsaufgaben. (Mit 3 Textabbildungen)	295
Hilda Geiringer , Das allgemeine ebene Problem des ideal-plastischen isotropen Körpers. (Mit 3 Textabbildungen)	299
W. Wunderlich , Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I. (Mit 4 Textabbildungen)	315

<i>Buchbesprechungen</i>	326
--------------------------------	-----

Federhofer, K., Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes (K. Girkmann). — Kupferschmid, V., Ebene und räumliche Rahmentragwerke (W. Mudrak). — Ledinegg, M., Dampferzeugung (P. Gilli).

Stabilität der Kreiszyklinderschale mit veränderlicher Wandstärke.*

Von K. Federhofer, Graz.

Zusammenfassung. Durch geeignete Wahl der Variablen beim Stabilitätsproblem der Kreiszyklinderschale, die durch axialen Druck belastet ist und stetig veränderliche Wandstärke besitzt, wird die das Problem beherrschende Differentialgleichung 4. Ordnung bei achsensymmetrischer Ausbeulung in eine einfache Form gebracht. Doch ist deren exakte geschlossene Lösung durch bekannte Funktionen selbst bei Annahme einfachster Gesetze für die Querschnittsänderung nicht möglich. Hingegen gelingt die Berechnung der kritischen Druckbelastung im Falle einer schwachen Querschnittsänderung verhältnismäßig einfach mit der Methode der Näherungstheorie für ein Eigenwertsproblem. Anwendungen für lineare und quadratische Querschnittsänderung.

Summary. The author discusses the stability problem of a circular cylindrical shell of continuously variable wall thickness, loaded by axial pressure. By choosing the variables in a suitable manner, the fourth-order differential equation which governs the problem is put into a simple form under the assumption that buckling is axially symmetrical. Solving this equation by known functions being impossible, even in case of the simplest cross-section functions, the critical load is computed for a cross-section which varies very slightly by using the approximation theory of eigenvalue problems. The results are applied to linear and square cross-section variations.

Résumé. L'auteur discute le problème de stabilité de la coque circulaire cylindrique d'épaisseur de paroi variable, soumise à une pression axiale. Par un choix propre des variables, l'équation différentielle du quatrième ordre du problème est mise sous une forme simple, pourvu que le voilement soit symétrique par rapport à l'axe. Il n'existe pas de solution exacte de cette équation par des fonctions connues, même pour les lois de variation de section les plus simples. Toutefois, on peut calculer la charge de pression critique, dans le cas d'une faible variation de section, d'une manière relativement simple, par la théorie d'approximation pour des problèmes à valeurs propres. Les résultats obtenus s'appliquent aux cas de variation de section linéaire ou carrée.

Die Ergebnisse der bekannten Stabilitätsuntersuchungen der Kreiszyklinderschale¹ gelten unter der Voraussetzung gleichbleibender Wandstärke. Eine Ausnahme hiervon macht eine Arbeit von Biezeno-Koch², in der die Stabilität eines zylindrischen Flüssigkeitsbehälters mit absatzweise veränderlicher Wandstärke untersucht wird. Der Einfluß einer stetigen Veränderlichkeit der Wandstärke auf die Stabilität der Kreiszyklinderschale wurde, soweit dem Verfasser bekannt, bisher noch nicht untersucht. Eine exakte geschlossene Lösung der im folgenden entwickelten Grundgleichung des Stabilitätsproblems ist selbst bei Annahme einfachster Gesetze für die stetige Änderung des Querschnittes nicht möglich. Beschränkt man sich hingegen auf eine schwache Querschnittsänderung entlang der Zylindererzeugenden, so ist das vorliegende Randwertproblem dem bei konstanter Wandstärke direkt lösbaren

* Herrn Prof. Dr. Th. Pöschl zum 70. Geburtstage gewidmet.

¹ Literaturangaben hierzu enthalten die Bücher: S. Timoshenko: Theory of Elastic Stability, S. 439—491. New York und London. 1936. — K. Girkmann: Flächentragwerke, 2. Aufl., S. 452—456. Wien: Springer-Verlag. 1948. — A. Pflüger: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 121—144. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950.

² C. B. Biezeno und J. J. Koch: Proc. 5. Intern. Congr. Appl. Mech. Cambridge (Mass.) 1938, S. 34. — Vgl. auch C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik, S. 607—620. Berlin: Springer-Verlag. 1939.

Stabilitätsproblem hinreichend benachbart, so daß die bekannte Methode der Störungstheorie für das Eigenwertproblem zur angenäherten Lösung herangezogen werden kann, die auf der wichtigen Stetigkeitseigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen beruht³.

Im folgenden soll dieses Verfahren zur Lösung des Stabilitätsproblems einer Kreiszylinderschale benutzt werden, die lediglich durch einen auf ihre beiden Ränder wirkenden axialen Druck belastet ist, wobei die Untersuchung auf nur axialsymmetrische Ausbeulungsformen beschränkt wird.

In (1) werden die Grundgleichungen für dieses Stabilitätsproblem bei stetig veränderlicher Wandstärke aufgestellt, sodann in (2) mit der Annahme schwacher Querschnittsänderung vereinfacht. Die angenäherte Lösung des Eigenwertproblems ist in (3) durchgeführt.

1. Die Differentialgleichung für das Stabilitätsproblem.

Es bezeichnen l und a die Höhe und den Halbmesser der Schale, $\delta(x)$ die veränderliche Wandstärke in der Entfernung x vom oberen Schalenrande. Die Längeneinheit jedes Zylinderrandes ist mit P belastet, (u, w) bedeuten die Verschiebungen eines Punktes der Schalenmittelfläche in axialer und radialer Richtung, letztere positiv nach außen.

Bei dem bis zur Stabilitätsgrenze gültigen statisch bestimmten Spannungszustand treten im Querschnitte x die Schnittkräfte $N_{x,0} = -P$, $N_{\varphi,0} = 0$ auf. Bei Erreichung der Knickgrenze sollen die Randbedingungen für eine an den Rändern freigelagerte Schale in Kraft treten. Der Spannungszustand des belasteten und aus der geraden Gleichgewichtslage gebrachten (verbogenen) Zylinders ist dargestellt durch

$$\bar{N}_x = N_{x,0} + N_x, \quad \bar{N}_\varphi = N_{\varphi,0} + N_\varphi, \quad M_x, \quad Q_x.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten Zylinderelement lauten:

$$\bar{N}_x' = 0, \tag{1}$$

$$Q_x' + \bar{N}_\varphi - \bar{N}_x \frac{w''}{a} = 0, \tag{2}$$

$$M_x' - a Q_x = 0, \tag{3}$$

worin die mit Akzent ' bezeichneten Ableitungen nach der Dimensionslosen

$$\xi = \frac{x}{a}$$

genommen sind.

Für die Schnittkräfte N_x und N_φ gilt, wenn Korrekturglieder von der Größenordnung $\frac{\delta^2}{a^2}$ unberücksichtigt bleiben,

$$N_x = \frac{E \delta}{a(1-\nu^2)} (u' + \nu w), \tag{4}$$

$$N_\varphi = \frac{E \delta}{a(1-\nu^2)} (w + \nu u'). \tag{5}$$

Aus (1) folgt nach Integration und bei Beachtung, daß an den Rändern $\bar{N}_x = -P$ sein muß:

$$N_x = 0$$

³ Sie ist im wesentlichen schon von Lord Rayleigh bei der Behandlung der Schwingungen einer Saite mit kleinen Unhomogenitäten benutzt worden (Theory of sound, 2. Aufl., Bd. I, S. 115–118, London 1894), ferner von E. Schrödinger: Ann. Physik 80, 437 (1926), und W. Meyer zur Capellen: Ingenieur-Arch. 10, 167 (1939); ebenda Th. Pöschl 9, 34 (1938).

oder wegen (4):

$$u' + r w = 0; \quad (\text{a})$$

hiermit ergibt sich aus (5) für die Ringkraft N_φ

$$N_\varphi = \frac{E \delta}{a} w. \quad (\text{6})$$

Damit geht die Gleichgewichtsgleichung (2) über in

$$Q_x' + \frac{E \delta}{a} w + \frac{P}{a} w'' = 0. \quad (\text{7})$$

Für das Biegemoment M_x gilt mit der Biegesteifigkeit

$$K = \frac{E \delta^3}{12 (1 - \nu^2)}; \quad (\text{8})$$

$$M_x = \frac{K}{a^2} (w'' - u'),$$

oder wegen (a):

$$M_x = \frac{K}{a^2} (w'' + r w).$$

Hierin stellt der Summand $r w$ eine Korrektur dar ähnlich jener, die in (4) und (5) unberücksichtigt geblieben ist und daher fortgelassen werden kann.

Mit $\chi = \frac{dw}{dx}$ als Neigung der Tangente der Biegelinie der Zylindererzeugenden wird schließlich

$$M_x = \frac{K}{a} \chi', \quad (\text{9})$$

womit die Gleichgewichtsgleichung (3) bei Beachtung der Veränderlichkeit von K sich überführen läßt in

$$\chi'' + 3 \frac{\delta'}{\delta} \chi' = \frac{a^2}{K} Q_x. \quad (\text{I})$$

Durch Differentiation von (7) entsteht als zweite Gleichung zwischen Q_x und χ :

$$Q_x'' - \frac{\delta'}{\delta} Q_x' + E \delta \chi + P \left(\chi' - \frac{\delta'}{\delta} \chi \right) = 0. \quad (\text{II})$$

Mit der Variabelntransformation

$$\chi = \frac{V}{\delta^2} \quad (\text{10})$$

wird (I) übergeführt in

$$\delta V'' - \delta' V' - 2 \delta'' V = 12 (1 - \nu^2) \frac{a^2}{E} Q_x \quad (\text{Ia})$$

und es gehen nun die simultanen Grundgleichungen (I) und (II) mit Einführung des Operators

$$L(\dots) = \delta(\dots)'' - \delta'(\dots)' \quad (\text{11})$$

über in

$$\left. \begin{aligned} L(V) - 2 \delta'' V &= 12 (1 - \nu^2) \frac{a^2}{E} Q_x, \\ L(Q_x) + P L\left(\frac{V}{\delta^2}\right) &= -E V. \end{aligned} \right\} \quad (\text{12a, b})$$

Durch Beseitigung von Q_x ergibt sich daher folgende homogene Gleichung 4. Ordnung für die Variable $V = \chi \delta^2$:

$$L L(V) - 2 L(\delta'' V) + 12 (1 - \nu^2) \frac{P a^2}{E} L\left(\frac{V}{\delta^2}\right) + 12 (1 - \nu^2) a^2 V = 0, \quad (\text{A})$$

womit die Grundgleichung dieses Stabilitätsproblems bei stetig veränderlicher Wandstärke δ ihre einfachste Form erhalten hat. Mit $P = 0$ entstehen aus (12) die

homogenen Grundgleichungen für das Spannungsproblem des zylindrischen Behälters mit veränderlicher Wandstärke⁴; sie lassen sich auf je eine homogene Gleichung 4. Ordnung

$$L L(Q_x) - 2 \delta'' L(Q_x) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2} Q_x = 0$$

und

$$L L(V) - L(2 \delta'' V) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2} V = 0$$

für die Variablen V und Q_x überführen.

Im Falle $\delta'' = \text{konst.}$ ist die Aufspaltung dieser Gleichungen 4. Ordnung in je zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung von der Form $L(\dots) + c(\dots) = 0$ möglich; dann gilt das quadratische Wandstärkengesetz

$$\delta(\xi) = \frac{k}{2} \xi^2 + b_1 \xi + b_2.$$

Das Hinzutreten des mit P behafteten Gliedes in Gl. (A) verhindert aber den eben erwähnten Zerfall in zwei Gleichungen 2. Ordnung.

Da sich $L\left(\frac{V}{\delta^2}\right)$ entwickeln läßt in

$$L\left(\frac{V}{\delta^2}\right) = \frac{1}{\delta^2} L(V) - \frac{4 \delta'}{\delta^2} V' + \frac{2 V}{\delta^3} (4 \delta'^2 - \delta \delta''),$$

so geht die Grundgleichung (A) im Falle $\delta'' = k$, also bei quadratischer Änderung der Wandstärke mit ξ über in

$$L L(V) - 2 k L(V) + 12(1-\nu^2) \frac{P a^2}{E \delta^2} \left[L(V) - 4 \delta' V + \frac{2 V}{\delta} (4 \delta'^2 - k \delta) \right] + 12(1-\nu^2) a^2 V = 0,$$

und diese Gleichung läßt nur für $\delta = \text{konst.}$ eine Zerlegung in zwei Gleichungen 2. Ordnung zu.

2. Die Zylinderschale mit schwach veränderlicher Wandstärke.

Bezeichnen δ_o, δ_u die Wandstärken am oberen und unteren Schalenrande, wo die homogene Ortskoordinate $\xi = x/a$ die Sonderwerte $\xi_o = 0$ und $\xi_u = \frac{l}{a}$ erhält, so ändere sich die Wandstärke $\delta(\xi)$ gemäß

$$\delta(\xi) = \delta_o \left[1 + \mu f\left(\frac{\xi}{\xi_u}\right) \right], \quad (13a)$$

wo μ einen Parameter bedeute, dessen höhere als erste Potenzen vernachlässigbar klein seien. Die vorläufig noch willkürliche stetige Funktion $f\left(\frac{\xi}{\xi_u}\right)$ hat am oberen Rande den Wert Null, am unteren Rande sei sie mit $f(1) = 1$ festgelegt. Dann hat der Parameter μ die Bedeutung

$$\mu = \frac{\delta_u}{\delta_o} - 1. \quad (13b)$$

Mit der Abkürzung

$$\delta_1(\xi) = \delta_o f\left(\frac{\xi}{\xi_u}\right) \quad (13c)$$

lautet das Wandstärkengesetz

$$\delta(\xi) = \delta_o + \mu \delta_1(\xi). \quad (13d)$$

⁴ Vgl. K. Federhofer: Anz. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. 1950, 275 und Österr. Ingenieur-Arch. 6, 43 (1951).

Mit diesem Ansatz entsteht aus dem Operator $L(\cdot)$ aus (11):

$$L(\cdot) = \delta_0(\cdot)'' + \mu L_1(\cdot),$$

wo

$$L_1(\cdot) = \delta_1(\cdot)'' - \delta_1'(\cdot)' = \delta_0\{f(\cdot)'' - f'(\cdot)'\};$$

damit läßt sich die Grundgleichung (A) für V in ihre explizite Form überführen. Mit den Zwischenergebnissen

$$\frac{L L(V)}{\delta_0^2} = V^{IV} + \mu(2f V^{IV} - f'' V'' - f''' V') + \mu^2\{f(f V^{IV} - f'' V'') - (f f''' - f' f'') V'\},$$

$$\frac{L(\delta_0' V)}{\delta_0^2} = \mu(f'' V'' + 2f''' V' + f^{IV} V) +$$

$$+ \mu^2\{f f'' V'' + (2f f''' - f' f'') V' + (f f^{IV} - f' f''') V\},$$

$$L\left(\frac{V}{\delta^2}\right) = \frac{1}{\delta_0^2} L\{(1 - 2\mu f + 3\mu^2 f^2 - \dots) V\}$$

$$= \frac{1}{\delta_0}\{V'' - \mu(f V'' + 5f' V' + 2f'' V) + \mu^2[f^2 V'' + 10f f' V' + 4(2f'^2 + f f'') V] - \dots\},$$

dem Eigenwerte

$$\lambda = \frac{P a^2}{K_c} = 12(1 - \nu^2) \frac{P a^2}{E \delta_0^3} \quad (14)$$

und mit der durch

$$\kappa^4 = 3(1 - \nu^2) \frac{a^2}{\delta_0^2} \quad (15)$$

bestimmten Abklingungszahl κ geht (A) über in

$$\begin{aligned} & V^{IV} + \lambda V'' + 4\kappa^4 V + \mu[(2f V^{IV} - 3f'' V'' - 5f''' V' - 2f^{IV} V) - \\ & - \lambda(f V'' + 5f' V' + 2f'' V)] + \mu^2[f^2 V^{IV} - 3f f'' V'' - (5f f''' - 3f' f'') V' - \\ & - 2(f f^{IV} - f' f''') V + \lambda\{f^2 V'' + 10f f' V' + 4(2f'^2 + f f'') V\}] + \\ & + \text{Glieder höherer Ordnung als } \mu^2 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

3. Das Nullproblem (ungestörtes Problem).

Für $\mu = 0$, also für konstante Wandstärke, entsteht die bekannte homogene Grundgleichung für die Eigenfunktionen des Nullproblems

$$V^{IV} + \lambda V'' + 4\kappa^4 V = 0. \quad (17)$$

Die Eigenfunktionen

$$V_k(\xi) = c \cos(\alpha_k \xi), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

genügen mit

$$\alpha_k = k\pi \frac{a}{l} = \frac{k\pi}{\xi_u}$$

der am oberen und unteren Rande $\xi_0 = 0$, $\xi_u = \frac{l}{a}$ vorgeschriebenen Bedingung $M_x = 0$, die gemäß den Gl. (9) und (10) gleichbedeutend ist mit $V^I = 0$.

Da

$$\chi = \frac{w'}{a} = \frac{V}{\delta^2},$$

somit

$$w_k(\xi) = \frac{a}{\delta_0^2} \int V_k d\xi = \frac{a c}{\delta_0^2 \alpha_k} \sin \alpha_k \xi,$$

so ist auch die Bedingung $w = 0$ an den Rändern erfüllt.

Diese Eigenfunktionen sollen „normiert“ sein, d. h. es sei der konstante, wegen der Homogenität der Differentialgleichung (17) willkürliche Faktor c so gewählt, daß

$$\int_{\xi_0}^{\xi_u} V_k^2 d\xi = 1, \quad (19)$$

wonach

$$c^2 = \frac{2 \alpha_k}{k \pi} = \frac{2 a}{l}$$

und daher

$$V_k(\xi) = \sqrt{\frac{2 \alpha_k}{k \pi}} \cos(\alpha_k \xi). \quad (18a)$$

Ferner gilt

$$\int_{\xi_0}^{\xi_u} V_k(\xi) V_i(\xi) d\xi = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k. \quad (20)$$

Mit (18a) liefert Gl. (17) für die von α_k (das heißt von der Zahl k der Halbwellen) abhängigen Eigenwerte λ_k des Nullproblems die Beziehung

$$\lambda_k = \alpha_k^2 + \frac{4 \kappa^4}{\alpha_k^2}. \quad (21)$$

Jenes $\alpha \equiv \alpha_n$, das den kleinsten Eigenwert $\lambda_{\min} \equiv \lambda_n$ liefert, ist zu berechnen aus

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha^2} = 1 - \frac{4 \kappa^4}{\alpha^4} = 0,$$

wonach

$$\alpha_n^2 = 2 \kappa^2$$

oder

$$\alpha_n = \kappa \sqrt{4} = \frac{n \pi}{\xi_u}.$$

Hiermit wird gemäß (21):

$$\lambda_{\min} = 4 \kappa^2 = \frac{P_{\min} a^2}{K_o}.$$

Demnach gilt für die kleinste Knicklast

$$P_{\min} = \frac{4 K_o \kappa^2}{a^2} = \frac{E \delta_o^2}{a \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (22)$$

Die zugehörige Zahl n der Halbwellen beträgt dann

$$n = \frac{l}{\pi a} \kappa \sqrt{2} = \frac{l}{\pi} \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{a \delta_o/2}}. \quad (23)$$

Das hieraus gerechnete n wird im allgemeinen nicht ganzzahlig sein; man hat dann P_{\min} für die beiden dem n nächstliegenden ganzen Werte von n auszurechnen und den kleineren von beiden zu nehmen, der die wahre kleinste Knickbelastung darstellt.

4. Näherungslösung der Gl. (16).

Die schon eingangs hervorgehobene Stetigkeitseigenschaft⁵ der Eigengrößen läßt den Schluß zu, daß diese bei veränderlicher Wandstärke für hinreichend kleines μ in der Nachbarschaft von V , λ , liegen müssen, so daß für die k -te Eigenfunktion V_k^* und für den k -ten Eigenwert λ_k^* in Gl. (16) die Ansätze⁶

$$V_k^* = V_k + \mu \bar{V}_k + \mu^2 \bar{\bar{V}}_k + \dots, \quad (24a)$$

$$\lambda_k^* = \lambda_k + \mu \bar{\lambda}_k + \mu^2 \bar{\bar{\lambda}}_k + \dots \quad (24b)$$

⁵ R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, §§ 2, 4, S. 337. Berlin: Springer-Verlag. 1924.

⁶ Wo es nicht besonders notwendig ist, die Ordnung der Eigenschwingung hervorzuheben, wird im folgenden der Ordnungszeiger k fortgelassen.

gemacht werden können. Geht man hiermit in die Gl. (16), so ergibt der Koeffizientenvergleich der Glieder mit dem Faktor μ und μ^2 für $\bar{V}(\xi)$ und $\bar{V}'(\xi)$ die inhomogenen Differentialgleichungen

$$\bar{V}^{IV} + \lambda \bar{V}'' + 4\kappa^4 \bar{V} = F_1(\xi, \bar{\lambda}), \quad (25)$$

$$\bar{V}^{IV} + \lambda \bar{V}'' + 4\kappa^4 \bar{V} = F_2(\xi, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}'), \quad (26)$$

wo

$$F_1(\xi, \bar{\lambda}) = -\bar{\lambda} V'' - (2f V^{IV} - 3f' V'' - 5f'' V' - 2f^{IV} V) + \\ + \lambda (f V'' + 5f' V' + 2f'' V) \quad (27)$$

und

$$F_2(\xi, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}') = -\bar{\lambda} V'' - \bar{\lambda}' V' - (2f \bar{V}^{IV} - 3f' \bar{V}'' - 5f'' \bar{V}' - 2f^{IV} \bar{V}) + \\ + \lambda (f \bar{V}'' + 5f' \bar{V}' + 2f'' \bar{V}) + \bar{\lambda} (f V'' + 5f' V' + 2f'' V) - \\ - \{f^2 V^{IV} - 3f f' V'' - (5f f'' - 3f' f') V' - 2(f f^{IV} - f' f''') V\} - \\ - \lambda \{f^2 V'' + 10f f' V' + 4(2f'^2 + f f'') V\}. \quad (28)$$

Die erste Störung \bar{V} der Eigenfunktion und ebenso die höheren Störungen sind demnach aus inhomogenen Gleichungen zu bestimmen, die gerade zu der homogenen Gl. (17) gehören, der die ungestörte Eigenfunktion V genügt, denn in (25), (26) steht an der Stelle von λ^* der spezielle Eigenwert λ des Nullproblems; die rechten Seiten dieser inhomogenen Gleichungen enthalten dagegen außer bekannten Größen noch die unbekannten Störungen $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}'$ des Eigenwertes λ .

Dieser Sachverhalt ermöglicht aber die Berechnung der Verbesserung des Eigenwertes λ durch einfache Quadraturen ohne vorherige Lösung der inhomogenen Gl. (25). Denn diese inhomogene Gleichung hat für einen Eigenwert der homogenen überhaupt nur dann und immer dann eine Lösung, wenn ihre rechte Gleichungsseite auf der zugehörigen Eigenfunktion orthogonal ist.

Die tatsächliche Lösung der inhomogenen Gl. (25) erweist sich demnach erst dann nötig, wenn neben der Verbesserung \bar{V} der Eigenfunktion V auch eine zweite Verbesserung $\bar{\lambda}$ des Eigenwertes λ angestrebt wird.

Fall a. Für die lineare Zunahme der Wandstärke ist in (13c):

$$f\left(\frac{\xi}{\xi_u}\right) = \frac{\xi}{\xi_u}$$

und demnach

$$\delta_1(\xi) = \delta_0 \frac{\xi}{\xi_u}$$

zu setzen.

Hiermit berechnet sich aus (27) die erste Störfunktion mit Beachtung von (18) zu

$$\frac{F_{1,k}(\xi, \bar{\lambda}_k)}{c \alpha_k^2} = \bar{\lambda}_k \cos \alpha_k \xi - \frac{\lambda_k + 2 \alpha_k^2}{\xi_u} \xi \cos \alpha_k \xi - \frac{5 \lambda}{\xi_u} \frac{\sin \alpha_k \xi}{\alpha_k}.$$

Dies läßt sich wegen (18) umformen in

$$F_{1,k}(\xi, \bar{\lambda}_k) = \alpha_k^2 (\bar{\lambda}_k - g_k) V_k, \quad (29)$$

worin

$$g_k(\xi, \lambda_k) = \frac{\lambda_k + 2 \alpha_k^2}{\xi_u} \xi + \frac{5 \lambda_k}{\xi_u} \frac{\operatorname{tg} \alpha_k \xi}{\alpha_k}. \quad (30)$$

Nun muß nach Obigem $F_{1,k}$ auf V_k orthogonal sein, wonach

$$\int_{\xi_0}^{\xi_u} F_{1,k} \cdot V_k d\xi = 0$$

oder

$$\int_{\xi_0}^{\xi_u} (\bar{\lambda}_k - g_k) V_k^2 d\xi = 0. \quad (31)$$

Mit Rücksicht auf (19) folgt daraus

$$\bar{\lambda}_k = \int_{\xi_0}^{\xi_u} g_k V_k^2 d\xi$$

oder nach Durchführung der Integrationen

$$\bar{\lambda}_k = \frac{1}{2} (\lambda_k + 2 \alpha_k^2). \quad (31a)$$

Hiermit liefert (24b) den verbesserten Eigenwert

$$\lambda_k^* = \lambda_k + \frac{\mu}{2} (\lambda_k + 2 \alpha_k^2).$$

Im besonderen folgt für die Verbesserung von λ_{\min} , wo $\alpha^2 = 2 \varkappa^2 = \frac{1}{2} \lambda_{\min}$:

$$\lambda_{\min}^* = \lambda_{\min} + \frac{\mu}{2} (\lambda_{\min} + 2 \alpha^2)$$

oder einfach

$$\lambda_{\min}^* = (1 + \mu) \lambda_{\min}.$$

Da

$$\lambda_{\min} = 4 \varkappa^2 = \frac{P_{\min} a^2}{K_0},$$

so folgt aus

$$\lambda_{\min}^* = \frac{P_{\min}^* a^2}{K_0}$$

für die verbesserte kleinste Knicklast

$$P_{\min}^* = (1 + \mu) P_{\min} = (1 + \mu) \frac{E \delta_0^2}{a \sqrt{3(1 - \nu^2)}}. \quad (32)$$

Zur Berechnung der ersten Störung \bar{V}_k der Eigenfunktion entwickelt man diese nach den Eigenfunktionen V_i des Nullproblems⁷:

$$\bar{V}_k(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ki} V_i(\xi), \quad (33)$$

womit wieder sämtliche Randbedingungen erfüllt bleiben.

Ebenso wird die erste Störfunktion $F_{1,k}$ in eine Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt:

$$F_{1,k} \equiv \alpha_k^2 (\bar{\lambda}_k - g_k) V_k(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ki} V_i(\xi). \quad (34)$$

Nach Multiplikation mit V_i und Integration über den Bereich $\xi = 0$ bis $\xi = \xi_u$ entsteht wegen (19) und (20):

$$c_{ki} = \int_0^{\xi_u} \alpha_k^2 (\bar{\lambda}_k - g_k) V_k V_i d\xi,$$

und zwar

$$c_{ki} = - \int_0^{\xi_u} \alpha_k^2 g_k V_k V_i d\xi \quad \text{für } i \neq k; \quad (35)$$

für $i = k$ wird wegen (31):

$$c_{kk} = 0. \quad (36)$$

⁷ Dieser Lösungsgang ist für Eigenwertprobleme vom Sturm-Liouvilleschen Typus entwickelt in Courant-Hilbert, Kap. V, § 5, S. 240 und 279.

Mit den Ansätzen (33) und (34) geht die Differentialgleichung (25) für \bar{V}_k über in

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ki} (V_i^{IV} + \lambda_k V_i'' + 4 \kappa^4 V_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ki} V_i. \quad (37)$$

Da

$$V_i^{IV} + \lambda_i V_i'' + 4 \kappa^4 V_i = 0,$$

demnach

$$V_i^{IV} + 4 \kappa^4 V_i = -\lambda_i V_i'',$$

so entsteht aus (37):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ki} (\lambda_k - \lambda_i) V_i'' = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ki} V_i$$

oder wegen $V_i'' = -\alpha_i^2 V_i$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [c_{ki} + \gamma_{ki} (\lambda_k - \lambda_i) \alpha_i^2] V_i = 0.$$

Demnach sind die Beiwerte γ_{ki} bestimmt durch

$$\gamma_{ki} = -\frac{c_{ki}}{\alpha_i^2 (\lambda_k - \lambda_i)} = \frac{\int_0^{\xi_u} \alpha_k^2 g_k V_k V_i d\xi}{\alpha_i^2 (\lambda_k - \lambda_i)} \quad \text{für } i \neq k. \quad (38)$$

Um das zunächst in der Form 0/0 unbestimmt bleibende γ_{kk} festzulegen, wird der gestörten Eigenfunktion V_k^* dieselbe Normierungsbedingung wie für V_k vorgeschrieben, das heißt

$$\int_0^{\xi_u} V_k^{*2} d\xi = 1$$

gesetzt.

Mit

$$V_k^* = V_k + \mu \bar{V}_k$$

folgt bei Unterdrückung des in μ quadratischen Gliedes

$$\int_0^{\xi_u} V_k^{*2} d\xi = 1 = \int_0^{\xi_u} V_k^2 d\xi + 2\mu \int_0^{\xi_u} V_k \bar{V}_k d\xi,$$

demnach

$$\int_0^{\xi_u} V_k \bar{V}_k d\xi = 0$$

oder wegen (33):

$$\gamma_{kk} = 0.$$

Somit ist die erste Störung der Eigenfunktion gegeben durch

$$\bar{V}_k(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-c_{ki}}{\alpha_i^2 (\lambda_k - \lambda_i)} V_i(\xi), \quad (39)$$

wobei der Zeiger $i = k$ auszuschalten ist.

Mit der in (30) angegebenen Funktion g_k führt die Berechnung der Beiwerte c_{ki} gemäß Gl. (35) zu folgenden Ergebnissen:

$$c_{ki} = \frac{-2 \alpha_k^2}{\xi_u^2 (\alpha_k^2 - \alpha_i^2)} \left[(\lambda_k + 2 \alpha_k^2) \frac{\alpha_k^2 + \alpha_i^2}{\alpha_k^2 - \alpha_i^2} - 5 \lambda_k \right] [(-1)^{k+i} - 1].$$

Im besonderen ergibt sich hieraus für $\alpha_k = \alpha_n$ (das dem λ_{min} zugehört) wegen $\alpha_n^2 = 2 \kappa^2$:

$$c_{ni} = -\frac{16 \kappa^4 (6 \kappa^2 - 7 \alpha_i^2)}{\xi_u^2 (2 \kappa^2 - \alpha_i^2)^2} [(-1)^{n+i} - 1]. \quad (40)$$

Da

$$\lambda_k = \alpha_k^2 + \frac{4 \kappa^4}{\alpha_k^2}$$

und

$$\lambda_i = \alpha_i^2 + \frac{4 \kappa^4}{\alpha_i^2},$$

so wird

$$\lambda_k - \lambda_i = \frac{(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)(\alpha_k^2 \alpha_i^2 - 4 \kappa^4)}{\alpha_k^2 \alpha_i^2},$$

womit Gl. (38) übergeht in

$$\gamma_{ki} = \frac{-c_{ki} \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 - \alpha_i^2)(\alpha_k^2 \alpha_i^2 - 4 \kappa^4)}.$$

Speziell für $\alpha_k = \alpha_n$ folgt hieraus

$$\gamma_{ni} = \frac{c_{ni}}{(2 \kappa^2 - \alpha_i^2)^2}$$

und mit Beachtung von (40)

$$\gamma_{ni} = -\frac{16 \kappa^4 (6 \kappa^2 - 7 \alpha_i^2)}{\xi_u^2 (2 \kappa^2 - \alpha_i^2)^4} [(-1)^{n+i} - 1],$$

wobei der Zeiger $i = n = \frac{\xi_u}{\pi} \kappa \sqrt{2}$ auszunehmen ist.

Die nun bekannte erste Störung \bar{V}_k erlaubt die Berechnung der zweiten Störfunktion $F_2(\xi, \bar{\lambda}, \bar{\lambda})$ aus Gl. (28), die sich wegen $f = \frac{\xi}{\xi_u}$ und mit Rücksicht auf $V'' = -\alpha^2 V$ und $V^{IV} = +\alpha^4 V$ vereinfacht in

$$F_2(\xi, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}) = \left[\frac{\xi^2}{\xi_u^2} \alpha^4 + \left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda} \frac{\xi}{\xi_u} + \lambda \frac{\xi^2}{\xi_u^2} \right) \alpha^2 - \frac{8 \lambda}{\xi_u^2} \right] V + \frac{5}{\xi_u} \left(\bar{\lambda} - 2 \lambda \frac{\xi}{\xi_u} \right) V' - \frac{2 \xi}{\xi_u} \bar{V}^{IV} + \left(\frac{\xi}{\xi_u} \lambda - \bar{\lambda} \right) \bar{V}'' + \frac{5}{\xi_u} \lambda \bar{V}'. \quad (41)$$

Auf Grund der Orthogonalitätsbedingung $\int_{\xi=0}^{\xi_u} F_2 V d\xi = 0$ läßt sich nun die zweite Verbesserung $\bar{\lambda}$ des Eigenwertes λ berechnen.

Die Durchführung der etwas langwierigen Rechnung führt zu folgendem Ergebnisse:

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{k^2 \pi^2} \left(\frac{25}{2} - \frac{k \pi}{3} \right) \right] - \frac{\alpha_k^2}{2} \left(\frac{2 k \pi + 3}{3 k^2 \pi^2} - 1 \right) - \frac{2}{k^2 \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ki} \alpha_i}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2} \left\{ 5 \lambda_k - \alpha_i (\lambda_k + 2 \alpha_i^2) \frac{\alpha_i^2 + \alpha_k^2}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2} \right\} [(-1)^{k+i} - 1] \quad \text{für } i \neq k.$$

Anstatt die erste Störung \bar{V}_k der Eigenfunktion nach den Eigenfunktionen V_i zu entwickeln [vgl. Gl. (33)], kann die inhomogene Gl. (25) für \bar{V}_k auch unmittelbar gelöst werden.

Zunächst wird Gl. (25):

$$\bar{V}_k^{IV} + \lambda_k \bar{V}_k'' + 4 \kappa^4 \bar{V}_k = F_{1,k} = c \alpha_k^2 \left[\bar{\lambda}_k \cos \alpha_k \xi - \frac{\lambda_k + 2 \alpha_k^2}{\xi_u} \xi \cos \alpha_k \xi - \frac{5 \lambda_k}{\xi_u} \frac{\sin \alpha_k \xi}{\alpha_k} \right]$$

durch Eintragung von $\bar{\lambda}_k$ aus Gl. (31a) und mit den Abkürzungen

$$b_1 = \alpha_k (4 \kappa^4 + 3 \alpha_k^4),$$

$$b_2 = 5 (4 \kappa^4 + \alpha_k^4),$$

umgeformt in

$$\bar{V}_k^{IV} + \lambda_k \bar{V}_k'' + 4 \kappa^4 \bar{V}_k = \frac{c}{k \pi} \left[b_1 \left(\frac{\xi_u}{2} - \xi \right) \cos \alpha_k \xi - b_2 \sin \alpha_k \xi \right].$$

Sie besitzt mit

$$b_3 = b_2 - b_1 \frac{4 \kappa^4 - 5 \alpha_k^4}{2 \alpha_k (4 \kappa^4 - \alpha_k^4)}$$

die Lösung

$$\bar{V}_k \frac{k \pi}{c} \frac{2 (4 \kappa^4 - \alpha_k^4)}{\alpha_k} = \frac{b_1}{2} (\xi_u - \xi) \xi \sin \alpha_k \xi + b_3 \left(\xi \cos \alpha_k \xi - \frac{1}{\alpha_k} \sin \alpha_k \xi \right)$$

für $\alpha_k^2 \neq 2 \kappa^2$,

welche die Randbedingungen $\bar{V}_k' = 0$ für $\xi = 0$ und $\xi = \xi_u = \frac{k \pi}{\alpha_k}$ (Verschwinden der Biegemomente) befriedigt.

Mit Hilfe dieser Lösung läßt sich aus Gl. (41) die zweite Störfunktion $F_2(\xi, \bar{\lambda}, \lambda)$ berechnen und mit dieser durch Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung die zweite Verbesserung λ . Die Anschreibung des dabei entstehenden, sehr umständlichen Ausdruckes für λ kann unterbleiben, da sich die vorliegende Untersuchung auf kleine Parameter μ beschränkt, für welche die erste Näherung [Gl. (31a) und (32)] hinreicht.

Fall b. Für die quadratische Zunahme der Wandstärke ist in (13c):

$$f\left(\frac{\xi}{\xi_u}\right) = \frac{\xi^2}{\xi_u^2}$$

und demnach

$$\delta_1(\xi) = \delta_0 \frac{\xi^2}{\xi_u^2}$$

zu setzen.

Hiermit berechnet sich aus (27) die Störungsfunktion $F_{1,k}(\xi, \bar{\lambda}_k)$ zu

$$F_{1,k} \frac{\xi_u^2}{c} = (\bar{\lambda}_k \alpha_k^2 \xi_u^2 - 6 \alpha_k^2 + 4 \lambda_k) \cos \alpha_k \xi - 10 \alpha_k \lambda_k \xi \sin \alpha_k \xi - \alpha_k^2 (\lambda_k + 2 \alpha_k^2) \xi^2 \cos \alpha_k \xi.$$

Die Forderung

$$\int_0^{\xi_u} F_{1,k}(\xi, \bar{\lambda}_k) \cdot V_k d\xi = 0$$

liefert

$$(\bar{\lambda}_k \alpha_k^2 \xi_u^2 - 6 \alpha_k^2 + 4 \lambda_k) \frac{k \pi}{2 \alpha_k} + 10 \alpha_k \lambda_k \frac{k \pi}{4 \alpha_k^2} - \alpha_k^2 (\lambda_k + 2 \alpha_k^2) \frac{k \pi}{12 \alpha_k^3} (2 k^2 \pi^2 + 3) = 0,$$

woraus sich ergibt

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k \left(\frac{1}{3} - \frac{17}{2 k^2 \pi^2} \right) + \frac{1}{\xi_u^2} \left(\frac{2 k^2 \pi^2}{3} + 7 \right).$$

Somit wird der verbesserte Eigenwert λ_k^* in erster Näherung

$$\lambda_k^* = \lambda_k \left[1 + \mu \left(\frac{1}{3} - \frac{17}{2 k^2 \pi^2} \right) \right] + \frac{\mu}{\xi_u^2} \left(\frac{2 k^2 \pi^2}{3} + 7 \right).$$

Für die Verbesserung von λ_{\min} ergibt sich hieraus wegen

$$\alpha^2 = 2 \kappa^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\xi_u^2} = \frac{\lambda_{\min}}{2}:$$

$$\lambda_{\min}^* = \left(1 + \frac{2}{3} \mu \right) \lambda_{\min} - \frac{10 \mu}{\xi_u^2}.$$

Hiermit folgt wegen $\lambda^* = -\frac{P^* a^2}{K_0}$ für die verbesserte kleinste Knicklast

$$P_{\min}^* = \frac{E \delta_o^2}{\alpha \sqrt{3(1-\nu^2)}} \left[1 + \mu \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\alpha \delta_o}{l^3} \right) \right].$$

Die erste Verbesserung \bar{V}_k der Eigenfunktion V_k kann wieder nach der im Falle a beschriebenen Art berechnet werden. Da sie aber nur zur Berechnung einer zweiten Verbesserung λ des Eigenwertes benötigt wird und diese wegen der vorausgesetzten Kleinheit des Parameters μ nicht beabsichtigt ist, so möge deren Berechnung unterbleiben.

Die hier benutzte Methode erweist sich auch bei der Berechnung der Eigenschwingzahlen von Zylinderschalen mit schwacher Querschnittsänderung als recht zweckmäßig, worüber in einer weiteren Mitteilung berichtet werden wird.

(Eingegangen am 11. Januar 1952.)

Über die athermische Plastizität und die Kerbwirkung im Raumgitter.

Von F. Vitovec, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die bestehenden dynamischen Plastizitätstheorien setzen eine hohe Kerbwirkung voraus. Unter der Annahme, daß in Realkristallen infolge der Mosaikstruktur bereits versetzungsähnliche Gitterstörungen vorgebildet sind, zu deren Aktivierung nur eine verhältnismäßig geringe Energie erforderlich ist, werden die Formeln abgeleitet, welche die kritische Schubspannung als Funktion von Temperatur und Verformungsgeschwindigkeit darstellen. Dem athermischen Grundvorgang überlagert sich die thermische Entfestigung. Die Annahme einer Kerbwirkung ist nicht erforderlich. Der dargestellte Funktionsverlauf stimmt mit den Versuchswerten von Einkristallen und Vielkristallen überein. Auf Grund des gegebenen Bildes werden Verfestigung und Einfluß der Fremdatome besprochen.

Summary. In the existing dynamical theories of plasticity a high notch effect is supposed. Assuming that in real crystals, due to their tessellated structure, lattice dislocations exist which may become active by a comparatively small energy, formulae are derived which represent the critical shear stress as a function of the temperature and the deformation velocity. To the athermic basic process a thermal de-hardening process is superimposed. It is not necessary to assume a notch effect. The graph of the function corresponds to experimental results taken from single crystals and polycrystals. Strainhardening, and influence of solute atoms, is discussed by using the ideas developed in the paper.

Résumé. Les théories de plasticité dynamiques existantes supposent un effet d'entaille important. En admettant que dans les cristaux réels, par suite de la structure en mosaïque, il y a déjà des dislocations du réseau dont l'activation ne nécessite qu'une énergie relativement faible, on établit les formules qui représentent l'effort critique de cisaillement en fonction de la température et de la vitesse de déformation. La désolidification thermique se superpose au phénomène fondamental athermique. Il est inutile d'admettre un effet d'entaille. La courbe représentée correspond avec les résultats d'essai pour monocristaux et polycristaux. Ce concepte s'applique à la solidification et l'influence des atomes étrangers.

Auf Grund theoretischer Überlegungen ergeben sich für den störungsfreien Idealkristall Fließspannungen, die um Größenordnungen über jenen liegen, welche zur Gleitverformung von Realkristallen erforderlich sind¹. Bereits 1921 hat M. Polanyi² darauf hingewiesen, daß der Unterschied zwischen theoretischer und experimenteller Schubspannung durch einen quantenhaften Vorgang der Gleitung zu erklären sei. Der zunächst naheliegende Schritt war, die Wärmebewegung der Atome für das Entstehen der Gleitung heranzuziehen, ohne damit eine besondere Vorstellung über

¹ U. Dehlinger: Atomistische Theorie der Festigkeit. Handbuch der Werkstoffprüfung, Bd. II, S. 26, herausgegeben von E. Siebel. Berlin: Springer-Verlag. 1939.

² M. Polanyi: Über die Natur des Zerreißvorganges. Z. Physik 7, 323—327 (1921).

den Gleitvorgang selbst zu verbinden. Auf dieser Grundlage entwickelte R. Becker³ 1926 seine Theorie, indem er annahm, daß Wärmeschwankungen die zur Auslösung einer bleibenden Verformung erforderliche kritische Schubspannung vermindern. Die auf Grund dieser Annahme entwickelten Formeln ergaben jedoch einen wesentlichen Einfluß der Temperatur auf die kritische Schubspannung, besonders im Bereiche tiefer Temperaturen. Nach Versuchen von M. Polanyi und E. Schmid⁴, W. Boas und E. Schmid⁵, W. Fahrenhorst und E. Schmid⁶ sowie W. Meißner, M. Polanyi und E. Schmid⁷ ist im Gegensatz zur Beckerschen Formel die Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung verhältnismäßig gering (athermische Plastizität). E. Orowan⁸ konnte jedoch 1934 zeigen, daß die von R. Becker entwickelte Formel bei Einführung eines Kerbwirkungsfaktors von der Größenordnung 10^2 bis 10^3 auch die genannten Versuchsergebnisse gut wiederzugeben vermag.

1934 wurde gleichzeitig von G. J. Taylor⁹ und M. Polanyi¹⁰ eine gleichartige Vorstellung über den Mechanismus des Gleitvorganges entwickelt, die heute als gesicherte Tatsache angenommen wird. Sie beruht auf der Annahme, daß ein „örtlicher Gleitschritt“, Versetzung genannt, bei dem in einem örtlich begrenzten Bereich einer Atomreihe eine solche mit einem Überschußatom gegenübersteht, sich wie eine Verdichtungsstelle über die Gleitebene fortpflanzt, bis schließlich die durch die Gleitebene getrennten Kristallteile um einen Atomabstand gegeneinander verschoben sind (Abb. 1). Die Gleitverformung ergibt sich somit aus einer großen Zahl solcher Versetzungen. Die Vorstellung geht dahin, daß die Versetzungen (räumlich: Versetzungslinien) an Fehlstellen, z. B. infolge Mosaikstruktur, entstehen und unter verhältnismäßig geringem Energieaufwand wandern.

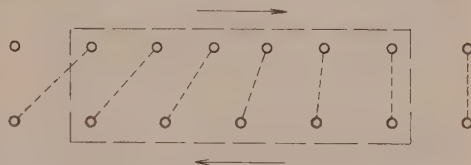


Abb. 1. Schematische Darstellung einer „Versetzung“.

Über die Bildung und Wanderung der Versetzungen bestehen derzeit zwei Anschauungen¹¹. Nach der deutschen Schule ist zur Bildung der Versetzung eine thermische Energie erforderlich, während die zur Wanderung der Versetzung erforderliche Energie praktisch vernachlässigt werden kann. Hierfür lassen sich die Beckerschen Überlegungen übertragen, indem die Wärmeschwankungen die Bildungsgeschwindigkeit der Versetzungen und damit die Verformungsgeschwindigkeit bestimmen. Die von R. Becker abgeleitete Formel wurde auch für die neue Auffassung vom Gleitmechanismus ohne Änderung beibehalten.

³ R. Becker: Über Plastizität, Verfestigung und Rekristallisation. Z. techn. Physik 547—555 (1926).

⁴ M. Polanyi und E. Schmid: Zur Frage der Plastizität. Verformung bei tiefen Temperaturen. Naturwiss. 17, 301—304 (1929).

⁵ W. Boas und E. Schmid: Über die Temperaturabhängigkeit der Kristallplastizität. Z. Physik 61, 767—781 (1930).

⁶ W. Fahrenhorst und E. Schmid: Über die Temperaturabhängigkeit der Kristallplastizität. II. Z. Physik 64, 845—855 (1930).

⁷ W. Meißner, M. Polanyi und E. Schmid: Plastizität von Metallkristallen bei tiefsten Temperaturen. Z. Physik 66, 477—489 (1930).

⁸ E. Orowan: Zur Kristallplastizität. Z. Physik 89, 605—633 (1934); Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 1, 117—126 (1935).

⁹ G. I. Taylor: The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 145, 362, 388, 405 (1934).

¹⁰ M. Polanyi: Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. Z. Physik 89, 660 (1934).

¹¹ Vgl. G. Masing: Zur Atomistik der plastischen Deformation. Berg- u. hüttenmänn. Mh. montan. Hochschule Leoben 94, 274—282 (1949).

Nach der englischen Auffassung sind die Versetzungen infolge der Mosaikstruktur bereits wanderungsfähig vorgebildet. Gitterstörungen bzw. Gittereigenspannungen hemmen jedoch die Wanderung der Versetzungen und bestimmen dadurch die Gleitgeschwindigkeit. Allerdings konnte die Darstellung des Einflusses von Temperatur und Verformungsgeschwindigkeit auf die kritische Schubspannung nach diesem Bild noch nicht befriedigend gelöst werden.

Somit wurde zunächst von R. Becker die rein thermische Gleittheorie entwickelt, die dann auf Grund der Anschauungen über den Gleitmechanismus zu einer Theorie führte, welche sowohl die Fehlstellen als auch die Wärmeschwankungen heranzieht, und schließlich besteht noch die englische Auffassung, daß die Versetzungen bereits

vorgebildet sind und daher für sie keine Aktivierungsenergie erforderlich ist.

Wie bereits erwähnt, war zur Übereinstimmung der Beckerschen Formel mit den Versuchsergebnissen die Annahme einer Kerbwirkung im Raumgitter erforderlich, wobei der Kerbwirkungsfaktor in der Größenordnung von 10^2 bis 10^3 liegen sollte. Dies würde bedeuten, daß bei Belastung an den Fehlstellen die Verschiebung der Atome aus ihrer Gleichgewichtslage den 100- bis 1000fachen Betrag der übrigen Atome erreichen muß. Die entsprechende, von E. Orowan modifizierte Beckersche Formel lautet:

$$v = C \cdot e^{-\frac{V \tau_{th}^2}{2 G k T} \left(1 + \frac{\tau_a \cdot q}{\tau_{th}}\right)^2} \quad (1)$$

Darin bedeuten q den Kerbwirkungsfaktor, τ_{th} die theoretische Schubspannung, τ_a die durch Belastung aufgebrachte Schubspannung, G den Gleitmodul, T die absolute Temperatur, k die Boltzmann-Konstante und C einen Proportionalitätsfaktor. V ist nach Becker jenes Raumbereich, über das sich die kritische Wärmeschwankung erstrecken muß, damit der entstehende

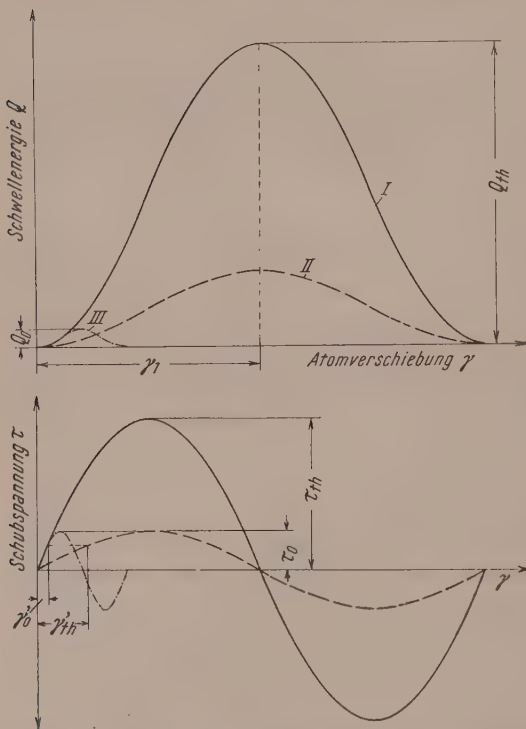


Abb. 2. Energie- und Kraftverlauf zwischen zwei Gitterpunkten.

örtliche Gleitvorgang nach Auflösen der thermischen Spannungsschwankung von der elastischen Umgebung nicht rückgängig gemacht wird. Es entspricht nach der Dimensionsgleichung dem Atom- bzw. Molvolumen.

Eine so hohe Kerbwirkung im diskontinuierlichen Raumgitter wurde mehrfach angezweifelt¹² und man setzte an Stelle der theoretischen Schubspannung τ_{th} die kritische Schubspannung im absoluten Nullpunkt $\tau_0 = \tau_{th}/q$ in Rechnung. Es erscheint dann zwar in der Formel kein Kerbwirkungsfaktor, die Kerbwirkung ist jedoch auch für diese Formel Voraussetzung, solange der Spannungs-Schiebungs-Verlauf gleichbleibt (Abb. 2, Kurve II). Bei Schubbeanspruchung erleiden sämtliche Atome der Gleitzone im Mittel die gleiche Verschiebung aus ihrer Ruhelage. Es ist anzunehmen, daß der Verschiebungsbetrag an der Fehlstelle nicht wesentlich größer ist als im übrigen Gleitbereich. Die zugehörige Spannung wäre aber kleiner (Abb. 2).

¹² Vgl. G. Masing: Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde, S. 372. Berlin: Springer-Verlag, 1950.

Rechnet man anderseits mit gleicher Spannung, dann müßte die Verschiebung an der Fehlstelle größer sein. In jedem Fall ist daher, auch wenn der Kerbwirkungsfaktor in der Formel nicht aufscheint, nach dem als Grundlage dienenden Bild vom Verformungsmechanismus eine hohe Kerbwirkung Voraussetzung für die Gültigkeit der Formel.

Es bestehen nun zwei Möglichkeiten, die Verminderung der hohen theoretischen Schubspannung ohne Kerbwirkung zu erklären. Entweder es herrschen an den Gitterfehlstellen hohe Schubeigenspannungen oder es sind die Fehlstellen so geartet, daß Aktivierungsenergie und Formänderungsweg ohne Wirkung hoher Eigenspannungen vermindert sind. Die Tatsache, daß sehr reine und sorgfältig geglühte Proben die geringsten kritischen Schubspannungen aufweisen¹³, spricht gegen die Annahme von hohen Schubeigenspannungen im unverformten Werkstoff.

Nimmt man jedoch an, daß an den Mosaikgrenzen versetzungsartige Gitterstörungen bereits vorhanden sind (Abb. 3), so hat die Aktivierungsenergie, welche diese Gitterstörung in wanderungsfähigen Zustand versetzt, den in Abb. 2, Kurve III, dargestellten Verlauf. Es werden nach dieser Vorstellung nicht nur die Schwellenergie vermindert, sondern auch die zugehörigen Schiebungsbeträge. Erst dann erübrigt sich die Annahme einer Kerbwirkung.

Im Realkristall kommen Gitterstörungen aller Grade vor. Ihre Häufigkeitsverteilung ist vom Störungszustand bzw. der Mosaikstruktur abhängig. Es ist zu erwarten, daß die Spannungs-Dehnungs-Linie von der Häufigkeitsverteilung der graduell verschiedenen Gitterstörungen wesentlich bestimmt wird. Im allgemeinen rechnet man jedoch mit einem Mittelwert der Schwellenergie. Die kritische Schubspannung dürfte somit durch Gitterstörungen größter Häufigkeit bestimmt sein.

Bei Übertragung der Beckerschen Überlegungen auf die Versetzungstheorie wurde nicht berücksichtigt, daß an den Fehlstellen die Schwellenergie bereits vermindert ist und daher nicht mit der hohen theoretischen Schubspannung, sondern mit einer geringeren zu rechnen ist. Aus der Verminderung der theoretischen Schwellenergie durch die Gitterstörungen ergibt sich die Ursache für das athermische Verhalten der plastischen Eigenschaften. Dem athermischen Grundvorgang, der durch die Fehlstellen bedingt ist, überlagert sich ein thermischer insofern, als die Wärmeschwankungen die Zahl der bei einer bestimmten Schubspannung wanderungsfähigen Versetzungen erhöhen. Weiters berechnete R. Becker die Aktivierungsenergie aus der Differenz von theoretischer Schubspannung und der durch Belastung aufgebrachten Schubspannung. Dem Wesen der Boltzmann-Funktion entspricht es jedoch, die Differenz der Energien in Rechnung zu setzen¹⁴.

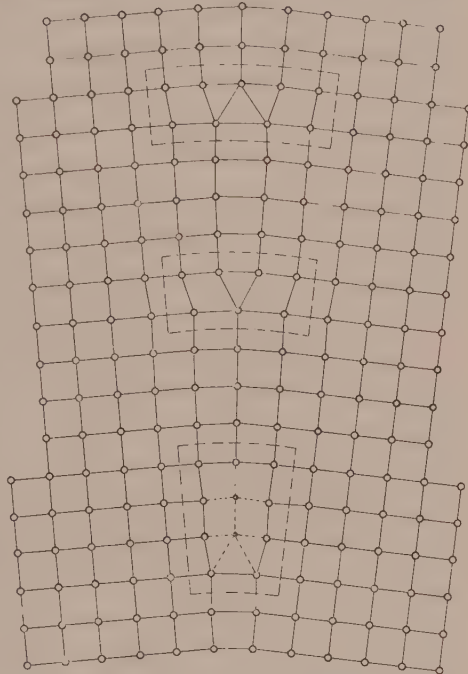


Abb. 3. Schematische Darstellung der Gitterstörungen infolge Mosaikstruktur sowie der stabilisierenden Wirkung von Fremdatomen auf die versetzungsartigen Gitterstörungen.

¹³ W. Boas u. E. Schmid: Über die Dehnung von Cadmiumkristallen. *Z. Physik* **54**, 16–45 (1929).

¹⁴ F. Vitovec und H. Nowotny: Zur Theorie der dynamischen Verformung. *Z. Physik* **131**, 41–47 (1951).

Ist die theoretische Schwellenergie im ungestörten Gitter Q_{th} und die durch die Gitterstörungen an den Mosaikgrenzen aufgespeicherte Energie Q_{st} , so ist die zur Aktivierung der Versetzungen erforderliche mittlere Energie Q_0

$$Q_0 = Q_{th} - Q_{st}. \quad (2)$$

Durch eine Schubbeanspruchung wird die Aktivierungsenergie um Q_a vermindert und es ist

$$Q_w = Q_0 - Q_a. \quad (3)$$

Ähnlich dem Beckerschen Ansatz ergibt sich die Verformungsgeschwindigkeit v mit

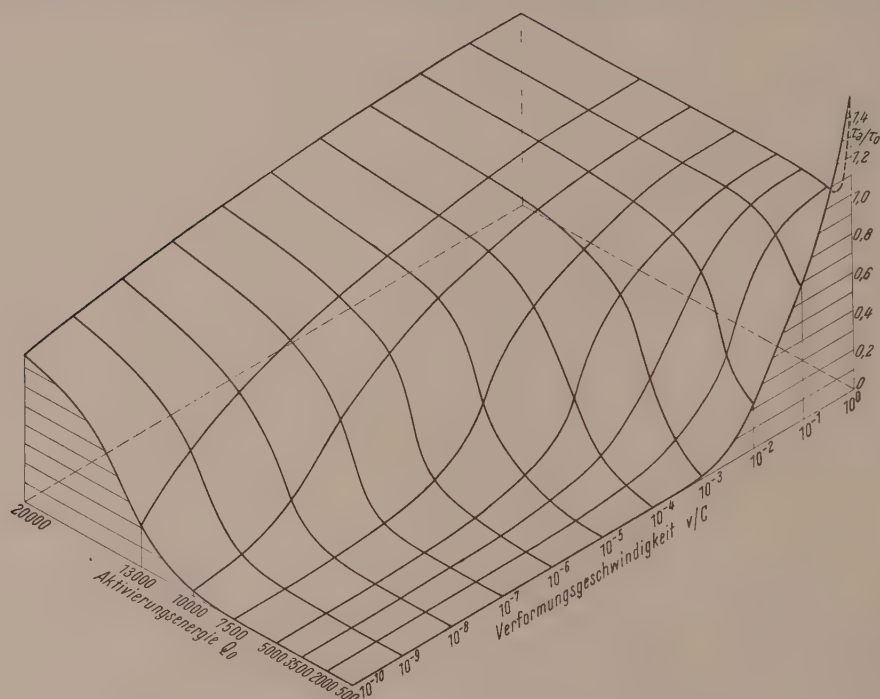


Abb. 4. Verhältnis der Spannungen τ_a/τ_0 als Funktion von Verformungsgeschwindigkeit v/C und Aktivierungsenergie Q_0 bei Raumtemperatur ($T = 290^\circ$).

Hilfe der Boltzmannschen Funktion unter Berücksichtigung von Hin- und Rückreaktion¹⁵ zu

$$v = C [e^{-(Q_0 - Q_a)/kT} - e^{-(Q_0 + Q_a)/kT}]. \quad (4)$$

v ist die Verformungsgeschwindigkeit, k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur und C eine Konstante.

Der Potentialverlauf entlang der Gleitebene kann mit Hilfe einer Winkelfunktion dargestellt werden (Abb. 2):

$$Q = \frac{Q_{th}}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi \gamma}{\gamma_1} \right). \quad (5)$$

Daraus ergibt sich die zugehörige Schubspannung τ zu

$$\tau = \frac{dQ}{d\gamma} = \tau_{th} \cdot \sin \frac{\pi \gamma}{\gamma_1}. \quad (6)$$

¹⁵ D. Kuhlmann und G. Masing: Untersuchungen zur plastischen Deformation an Kupferdraht. Z. Metallkunde **39**, 361—375 (1948).

Für die Aktivierung einer Versetzung sind unter Berücksichtigung der Gitterstörung an Stelle von Q_{th} und $\tau_{th} Q_0$ bzw. τ_0 zu setzen (Abb. 2). Aus Gl. (3), (5) und (6) ergibt sich

$$Q_w = Q_0 \left[\cos \arcsin \left(\frac{\tau_a}{\tau_0} \right) \right], \quad (7)$$

wobei τ_a die Schubspannung durch äußere Belastung bedeutet, und es ist die Verformungsgeschwindigkeit v nach Gl. (4)

$$v = C \left[e^{-\frac{1}{kT} \left\{ Q_0 - Q_0 \left[1 - \cos \arcsin \left(\frac{\tau_a}{\tau_0} \right) \right] \right\}} - e^{-\frac{1}{kT} \left\{ Q_0 + Q_0 \left[1 + \cos \arcsin \left(\frac{\tau_a}{\tau_0} \right) \right] \right\}} \right]. \quad (8)$$

Durch Umformung von Gl. (8) ergibt sich die kritische Schubspannung τ_a zu

$$\tau_a = \tau_0 \sin \arccos \left[1 - \frac{kT}{Q_0} \left(\operatorname{arsinh} e^{\frac{Q_0}{kT} \cdot v/2C} \right) \right]. \quad (9)$$

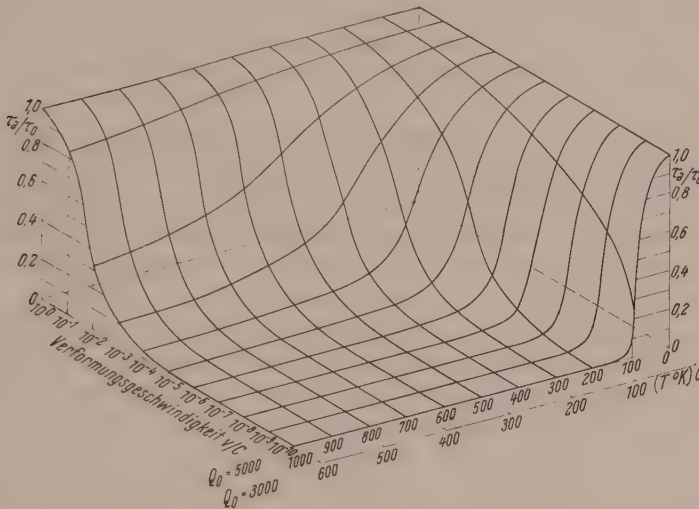


Abb. 5. Einfluß von Temperatur T und Verformungsgeschwindigkeit v/C auf das Spannungsverhältnis τ_a/τ_0 bei Aktivierungsenergien von $Q_0 = 5000$ cal/Mol und $Q_0 = 3000$ cal/Mol.

Die Gl. (8) bzw. (9) sind in Abb. 4 für verschiedene Werte von Q_0 dargestellt. Mit Hilfe von Versuchswerten über die Abhängigkeit der kritischen Schubspannung von der Verformungsgeschwindigkeit läßt sich Q_0 ermitteln und daraus nach Gl. (9) der Einfluß der Temperatur berechnen. Die in Abb. 4 dargestellten Kurven für den Einfluß der Verformungsgeschwindigkeit auf die kritische Schubspannung besitzen im halblogarithmischen Maßstab einen Wendepunkt. Der Gradient nimmt mit steigender Verformungsgeschwindigkeit zunächst zu und fällt wieder nach Überschreiten des Wendepunktes. Die Versuchsergebnisse bestätigen den Funktionsverlauf. Die Versuche von D. Kuhlmann und G. Masing¹⁵ zeigen den Verlauf im unterkritischen Bereich, jene von M. Kornfeld¹⁶ und R. Roscoe¹⁷ den Verlauf im überkritischen Bereich und die Versuche von B. Chalmers¹⁸ an Sn-Kristallen erstrecken sich über beide Bereiche. Die von R. Becker entwickelte Formel vermag nur die

¹⁵ M. Kornfeld: Die Kinetik der plastischen Deformation. Physik. Z. Sowjetunion **10**, 605—617 (1936).

¹⁷ R. Roscoe: The Plastic Deformation of Cadmium Single-Crystals. Philos. Mag. J. Sci. **21**, 399—406 (1936).

¹⁸ B. Chalmers: Micro-Plasticity in Crystals of Tin. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **156**, 427—443 (1936).

Versuchswerte im unterkritischen Bereich darzustellen. Leider kann auf Grund der derzeit vorliegenden Versuchsergebnisse kein exakter Wert von Q_0 ermittelt werden, da entweder der Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit (nicht der Verformungsgeschwindigkeit) oder der Einfluß der Temperatur untersucht wurde, jedoch nicht beide Einflüsse am gleichen Probenwerkstoff. Auf Grund der Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung dürfte der Wert von Q_0 in einem Bereich von 2000 bis 6000 cal/Mol liegen. In Abb. 5 ist der Einfluß der Temperatur und der Verformungsgeschwindigkeit auf die kritische Schubspannung für einen Wert von $Q_0 = 5000$ cal/Mol und $Q_0 = 3000$ cal/Mol dargestellt.

In diesem Zusammenhang ist weiters zu berücksichtigen, daß die Gleitung über den gesamten Querschnitt der Probe stattfindet. Setzt jedoch die Gleitung im Inneren des Kristalls ein, so müssen Versetzungen entstehen, welche in beide Richtungen laufen. Da zunächst nicht anzunehmen ist, daß Versetzungen, die in entgegengesetzte Richtung wandern, am gleichen Ort entstehen (vgl. Abb. 3), werden auch bei reiner Gleitung im Realkristall Gitterstörungen bzw. Gitterspannungen entstehen, die zu einer Verfestigung führen. Neben der Änderung der Häufigkeit der Gitterstörungen bestimmten Grades mit der Verformung ist dies jedoch nicht die einzige Ursache der Verfestigung¹⁹.

Die Bindung einer Versetzung und damit die Verfestigung kann am Mosaikblockrand, an Fremdatomen oder durch Auflösung einer Versetzung bei Wanderung eines Paares erfolgen. Im letzten Falle bleibt dann eine freie Versetzung im Gitter zurück¹¹. Schließlich können die Gittergebiete, in welchen auf irgendeine Weise Versetzungen gebunden sind, bei Fortschreiten des Verzerrungszustandes wieder Ausgangspunkt neuer Versetzungen werden.

Die Wirkung von Fremdatomen kann so erklärt werden, daß sie je nach ihrer Eigenart sowohl die erforderliche Aktivierungsenergie erhöhen, als auch die Wanderung der Versetzung behindern können. Bei Aushärtung und Alterung dürfte der erste Fall maßgebend sein²⁰. Die Fremdatome diffundieren im Bestreben, das Gesamtpotential zu vermindern, an die Gitterstörungen und erhöhen dadurch die Aktivierungsenergie für die Versetzungen (Abb. 3). Dafür spricht z. B., daß aushärtungsfähige Legierungen unmittelbar nach dem Ablösen weich sind und die Alterung des Stahles erst nach Verformung und bei Raumtemperatur nach Auslagerung eintritt, während im Gebiet der Blausprödigkeit die Diffusionsgeschwindigkeit der Fremdatome so hoch ist, daß die Diffusion an die Störstellen noch während der Verformung stattfindet. Außerdem ist durch dieses Bild der starke Einfluß von Spuren von Verunreinigungen auf den Verformungswiderstand zu erklären, da zur Erhöhung der Aktivierungsenergie der versetzungsähnlichen Gitterstörungen an den Mosaikgrenzen verhältnismäßig wenige Atome ausreichen.

Für die Annahme, daß die Verformungsgeschwindigkeit bzw. der Verformungswiderstand durch die Behinderung der Wanderung der Versetzungen bestimmt wird, spricht, daß mit steigender Verformungsgeschwindigkeit auch die kritische Schubspannung τ_0 , welche für den absoluten Nullpunkt extrapoliert wird, erhöht wird⁵.

In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß auch bei vielkristallinen Metallen der Einfluß der Temperatur und der Verformungsgeschwindigkeit auf Fließgrenze und Festigkeit einen Verlauf zeigt, wie er durch Gl. (9) wiedergegeben wird

¹⁹ Vgl. F. Röhm und W. Sautter: Experimenteller Nachweis zweier Arten von Verfestigung bei der plastischen Verformung von Kristallen. *Z. Metallkunde* **42**, 289—293 (1951).

²⁰ A. Leon und F. Vitovec: Über den Einfluß der Verformungsalterung auf die kritischen Spannungen. Beiträge zur angewandten Mechanik (Federhofer-Girkmann-Festschrift), S. 239—254. Wien. 1950.

und in Abb. 5 dargestellt ist²¹. Es ist daher möglich, Gl. (8) auch für vielkristalline Werkstoffe anzuwenden, wenn man annimmt, daß infolge der gegenseitigen Verformungsbehinderung der Kristallite die Aktivierungsenergie Q_0 bzw. die Schubspannung τ_0 erhöht wird.

(Eingegangen am 18. Januar 1952.)

Einfaches Gerät zur mechanischen Auswertung von Vermessungsaufgaben.

Von W. Embacher, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Elementare Vektoroperationen werden zur Lösung von Aufgaben der Vermessung verwendet. Die Aufspaltung eines Vektors in rechtwinkelige Koordinaten sowie die Addition und Subtraktion von Vektoren wird auf vier Stellen genau, mechanisch durchgeführt.

Summary. Elementary vector operations are applied to solve problems of surveying. The decomposition of a vector into rectangular coordinates, and the addition and subtraction of vectors, is carried out mechanically to four figures.

Résumé. Les opérations vectorielles élémentaires sont appliquées à la solution des problèmes de la géodésie. La décomposition d'un vecteur en coordonnées rectangulaires, ainsi que l'addition et la soustraction des vecteurs sont exécutées mécaniquement et à quatre chiffres.

Um einen beliebigen Punkt P in der Ebene festzulegen, kann man so vorgehen, daß man einen festen Punkt O wählt und die Strecke OP nach Länge, Richtung und Richtungssinn angibt. Die „Polarmethode“, eine Aufnahmемethode in der niederen Geodäsie, führt bekanntlich auf diese Art der Festlegung eines Punktes zurück und entspricht im Grunde genommen der Messung von Vektoren. Ein Großteil der Vermessungsaufgaben läßt sich vektoriell lösen, und diese Lösungen würden die Arbeit des Ingenieurs wesentlich verkürzen, wenn es möglich wäre, nicht nur formelmäßig, sondern auch praktisch mit Vektoren zu rechnen und eine Zerlegung der Vektoren in Koordinaten ohne umständliche Tafelwerke durchzuführen.

Der Verfasser hat, zurückgreifend auf das sogenannte Vektorgerät von K. Friedrich¹, ein Instrument entwickelt, welches für die Ablesung von vierstelligen Zahlen hinreichend genau ist und zur mechanischen Auswertung von Vermessungsaufgaben, aber auch zur Auflösung zahlreicher Beispiele der Statik² dienen kann.

Das Auswertegerät (österreichisches Patent angemeldet).

Es besteht aus einem Bodenbrett (Abb. 1), auf dem ein kleineres Brett in einer Schwalbenschwanzführung verschiebbar angebracht ist. Darauf befindet sich ein Teilkreis, der sich gegen die Nullmarke F verdrehen läßt. Ein Zeiger ZZ' , im Mittelpunkt M des Teilkreises drehbar angebracht, ermöglicht die Einstellung eines Vektors.

²¹ P. Ludwik: Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Nachwirkungerscheinungen. *Physik. Z.* **10**, 411—417 (1909). — M. J. Manjoine und A. Nadai: High Speed Tension Test at Elevated Temperatures. *Proc. Amer. Soc. Test. Mater.* **40**, 822—837 (1940). — A. Nadai und M. J. Manjoine: High Speed Tension Test at Elevated Temperatures. Parts II and III. *Trans. A. S. M. E.* **63**, A-77 (1941). — M. J. Manjoine: Influence of Rate of Strain and Temperature on Yield Stresses of Mild Steel. *J. appl. Mechan.* **211**—218 (1944). — E. A. Davies: The Effect of the Speed of Stretching and the Rate of Loading on the Yielding of Mild Steel. *Trans. A. S. M. E.* **60**, A-137 (1938).

¹ D. R. P. 333 548.

² W. Embacher: Mechanische Auswertung von Aufgaben der graphischen Statik und von Absteckungen. *Österr. Bauztg.*, Wien 1952.

Über dem ganzen befindet sich mit dem Bodenbrett fest verbunden ein Koordinatograph, der jeden Punkt der Teilkreisebene zahlenmäßig erfassen kann. Am Ende des waagrechten Armes HH' des Koordinatographen befindet sich ein um den Nullpunkt O drehbares Achsenkreuz. Alle Teilungen sind mit Nonien versehen, so daß man den Zehntelmillimeter bzw. die Bogenminute ablesen und einstellen kann. Die waagrechte und senkrechte Bewegung des Koordinatographen kann durch je ein fünfstelliges Zählwerk mit Zehnerübertragung, in der Skizze mit R_1 und R_2 bezeichnet, registriert werden. Die Zählräder werden ähnlich der Proportional-Hebelrechenmaschine über die Kupplung K und über eine Zahnstange mit dem beweglichen Teil des Koordinatographen verbunden.

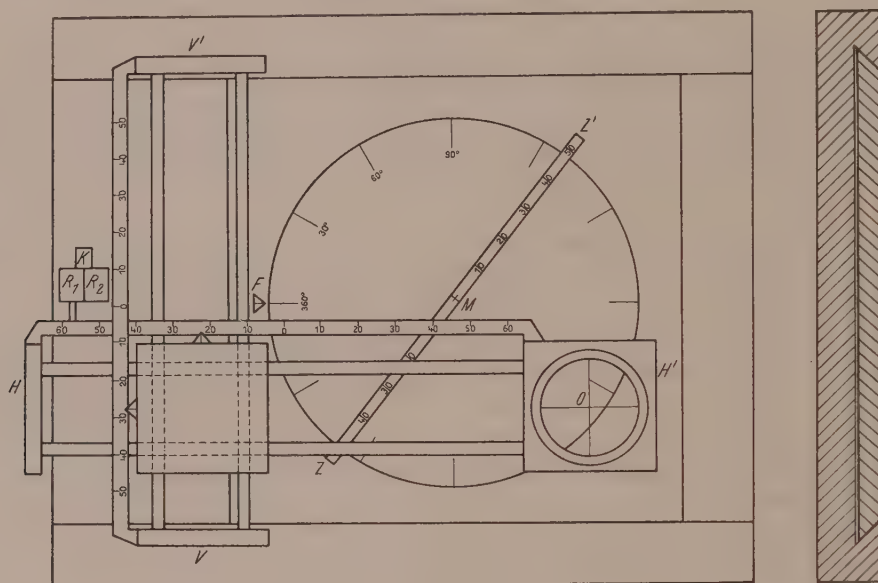


Abb. 1.

Auf Grund der einfachen Handhabung des 50-m-Maßbandes setzen sich sowohl bei der Polaraufnahme als auch bei Polygonzügen Höchstentfernungen von 50 m immer mehr durch. Um den praktischen Maßstab 1:100 beibehalten zu können, wird die Länge des Zeigers mit 50 cm festgesetzt. Alle übrigen Maße des Instrumentes ergeben sich aus dieser Länge.

Eine Abschätzung der Genauigkeit des Instrumentes läßt sich leicht durchführen, wenn man komplexe Zahlen den Vektoren in der Ebene zuordnet. Ein Vektor von der Länge a und der Richtung α läßt sich darstellen als

$$a (\cos \alpha + i \sin \alpha) = a e^{i\alpha},$$

dann ist

$$d(a e^{i\alpha}) = i a e^{i\alpha} d\alpha + e^{i\alpha} da;$$

das heißt, ein Fehler in der Richtung bewirkt eine Verdrehung des Vektors, und zwar beträgt diese Verdrehung im linearen Maß Länge des Vektors mal Richtungsfehler (im Bogenmaß) und ein Fehler in der Vektorlänge wirkt sich in der Richtung des Vektors aus. Das würde für die oben angeführte Ablesegenauigkeit bedeuten, daß man im Maßstab 1:200 für den Endpunkt eines 100 m langen Vektors eine Fehlerellipse mit der großen Achse $a = 1.5$ cm und der kleinen Achse $b = 1.0$ cm erhält.

Streckensummierung und -zerlegung in Komponenten.

Der Rechenvorgang ist sehr einfach und soll an Hand eines praktischen Beispiels erläutert werden: Es sei eine Strecke von der Länge 7 und der Richtung 125° zu einer Strecke von der Länge 5 und der Richtung 35° zu addieren. In der abgekürzten Schreibweise lautet diese Aufgabe:

$$5_{35^\circ} + 7_{125^\circ} = ?$$

Der Teilkreis wird auf 125° eingestellt und die waagrechte Schiene des Koordinatographen, sie soll weiterhin als Lineal bezeichnet werden, steht auf Null. Nun wird der Teilkreis waagrecht und der Koordinatograph senkrecht so lange verschoben, bis das Ablesekreuz O mit der Fünfermarke des Zeigers ZZ' , der vorher auf 35° eingestellt wurde, zur Deckung kommt. Nun stellt man auf dem Lineal 7 ein, dreht den Zeiger, bis er wieder mit dem Kreuz O' zur Deckung kommt, und liest am Zeiger die Länge und Richtung des Summenvektors ab. Die entsprechende Vektorgleichung lautet:

$$5_{35^\circ} + 7_{125^\circ} = 8.6_{89^\circ 30'}.$$

Soll der Vektor von der Länge 8.6 und der Richtung $89^\circ 30'$ in zwei Vektoren von der Richtung 35° und 125° zerlegt werden, das heißt

$$8.6_{89^\circ 30'} = a_{35^\circ} + b_{125^\circ},$$

so geht man folgendermaßen vor: Der Teilkreis wird auf 125° und der Zeiger auf $89^\circ 30'$ gestellt. Die Marke O des Ablesekreuzes bringt man zur Deckung mit der Marke 8.6 des Zeigers ZZ' . Hierauf dreht man den Zeiger auf 35° und verschiebt das Lineal wieder so, daß die Marke des Ablesekreuzes wieder mit dem Lineal zur Deckung kommt. Die Länge der Komponente in Richtung 125° liest man nun am Lineal, die Länge der Komponente in Richtung 35° am Zeiger ab. Man erhält schließlich die Vektorgleichung:

$$8.6_{89^\circ 30'} = 5_{35^\circ} + 7_{125^\circ}.$$

Verwendungsmöglichkeit des Gerätes.

Alle Umwandlungen von Polarkoordinaten in rechtwinkelige und ihre Umkehrungen können mit der oben angeführten Genauigkeit durchgeführt werden. Die Berechnung von Richtungswinkeln und Entfernungen, die vollautomatische Berechnung von Polygonzügen, das Rückwärtseinschneiden, das Problem der unzugänglichen Distanz, die Streckenteilung von einem Instrumentenstandpunkt aus, die Bestimmung der Winkelfunktionen und schließlich der Ausgleich nach vermittelnden und bedingten Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate gehört in den Anwendungsbereich des Instrumentes.

Auswertung der angeführten Aufgaben.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die große Anzahl der Anwendungsmöglichkeiten des Instrumentes angeführt. Es soll zunächst die für das Gerät einfachste Aufgabe, die vollautomatische Berechnung der Polaraufnahme und des Polygonzuges gezeigt werden. Zur Berechnung der Polaraufnahme wird der Nullpunkt O des Ablesekreuzes mit dem Mittelpunkt M des Teilkreises zur Deckung gebracht. In den Zählwerken R_1 und R_2 stellt man die Koordinaten des Instrumentenstandpunktes ein, hierauf werden durch die Kupplung K die Zählwerke mit dem Koordinatographen in Verbindung gebracht. Stellt man nun mit dem Zeiger die Richtung und Entfernung des gesuchten Punktes ein und bringt den Punkt O des Lineals mit der Entfernungsmarke des Zeigers zur Deckung, so kann man am Zählwerk die Koordinaten des am Gerät eingestellten Punktes ablesen. Bei der Auswertung eines Polygonzuges

werden die Koordinaten aller Brechungspunkte auf diese Art fortlaufend bestimmt. Zur Lösung der Umkehraufgabe, der Ermittlung von Richtungswinkel und Entfernung, stellt man in den Zählwerken R_1 und R_2 die Koordinaten des ersten Punktes ein, bringt den Punkt O des Ablesekreuzes mit dem Mittelpunkt M des Teilkreises zur Deckung und kuppelt die Zählwerke ein. Nun wird der Koordinatograph so lange verstellt, bis die Koordinaten des zweiten Punktes in den Zählwerken erscheinen. Die Verbindung $M-O$ ergibt die Entfernung und den Richtungswinkel zwischen den beiden Punkten.

Zur Berechnung eines Neupunktes nach der Schnittmethode wird erst die Dreiecksberechnung nach der oben beschriebenen Streckenzerlegung durchgeführt. Man erhält dadurch die zwei Vektoren zum Neupunkt. Wie bei der Polaraufnahme lassen sich damit die Koordinaten des gesuchten Punktes bestimmen.

Der Rückwärtsschnitt wird mit Hilfe des Collinschen Hilfspunktes C (Abb. 2) durchgeführt. Zunächst rechnet man die Koordinaten von C aus dem Dreieck $13C$. Die Strecke $\overline{13}$ wird in die Richtungen $\overline{13} - \beta$ und $\overline{31} + \alpha$ zerlegt. Die zugehörige Vektorgleichung lautet:

$$\overline{13_{13}} = \overline{1C_{13-\beta}} + \overline{3C_{31+\alpha}}.$$

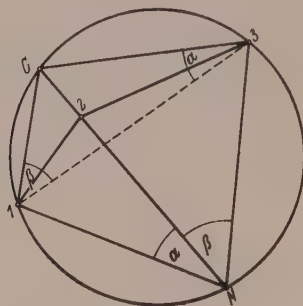


Abb. 2.

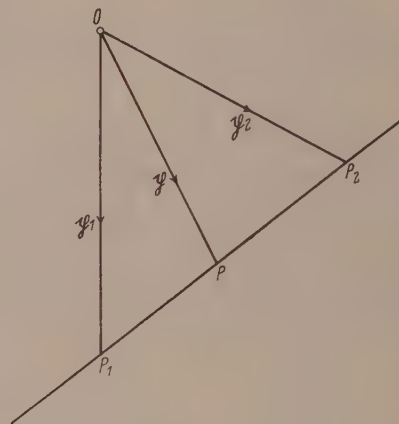


Abb. 3.

Aus den Dreiecken $1CN$ und $3NC$ erhält man den Neupunkt N . Dazu wird die Strecke $\overline{1C}$ in die Richtungen $\overline{1N}$ und \overline{CN} , die Strecke $\overline{C3}$ in die Richtungen \overline{CN} und $\overline{3N}$ zerlegt. Der Rückwärtsschnitt zerfällt also in drei Vorwärtsschnitte, deren Auswertung nach dem oben Gezeigten bereits bekannt ist.

Das Problem der unzugänglichen Distanz oder die Aufgabe von Hansen läßt sich ebenfalls auf Vorwärtsschnitte zurückführen, wenn man die Ausgangsseite z. B. mit 100·00 m annimmt und die resultierenden Seiten im entsprechenden Verhältnis vergrößert oder verkleinert.

Ein Vektor $\overline{P_1P_2}$ (Abb. 3) kann als Differenz der Ortsvektoren seines Endpunktes und seines Anfangspunktes bestimmt werden. Man ermittelt die Entfernung und die Richtung zu P_1 und P_2 , sodann entnimmt man aus dem Auswertegerät Richtung und Länge des Vektors $\overline{P_1P_2}$. Die nächste Aufgabe sei, die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in einem Punkt P im Verhältnis $\lambda:1$ zu teilen. Es soll

$$\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = \lambda : 1$$

sein oder

$$\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{P_1P_2} = \lambda : (\lambda + 1),$$

somit ist

$$P_1 \vec{P} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} P_1 \vec{P}_2$$

und

$$p - p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} (p_2 - p_1).$$

Damit erhält man den Vektor des Teilungspunktes

$$p = p_1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} (p_2 - p_1) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right) p_1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} p_2,$$

es ist weiter

$$p = \frac{1}{\lambda + 1} p_1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} p_2$$

und schließlich

$$p = \frac{p_1 + \lambda p_2}{1 + \lambda}.$$

Dieser Teilungsvektor läßt sich mit dem Gerät bestimmen. Nun wird er in die Natur übertragen, und die Aufgabe, die Strecke $P_1 P_2$ zu ermitteln und im Verhältnis $\lambda : 1$ zu teilen, kann von einem Instrumentenstandpunkt aus gelöst werden.

Die Winkelfunktionen lassen sich am Koordinatographen oder am Zählwerk ablesen, wenn der Teilkreis auf Null gestellt wird und der Zeiger in der gewünschten Richtung steht. Bringt man das Ablesekreuz über die 10-cm-Marke des Zeigers, so erhält man den Sinus und Cosinus; stellt man auf dem Lineal 10.00 ein, so ist auf der senkrechten Teilung des Koordinatographen die Tangente abzulesen.

Die Lösung der Ausgleichsrechnung mit Hilfe des Auswertegerätes hat der Verfasser in einer früheren Arbeit³ behandelt. Es wurde darin gezeigt, wie man die Richtung der Achsen der Fehlerellipse schon beim Aufstellen der Widerspruchsvektoren findet, die vektorielle Ausgleichsrechnung konnte auf sämtliche vermittelnde Beobachtungen ausgedehnt werden, und der vektorielle Ausgleich von Dreiecksnetzen nach bedingten Beobachtungen wurde durchgeführt. Auch auf diesem Gebiete bringt die Anwendung des Auswertegerätes eine große Zeitersparnis.

(Eingegangen am 4. März 1952.)

Das allgemeine ebene Problem des ideal-plastischen isotropen Körpers.

Von Hilda Geiringer, dzt. Rom*.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Das vollständige Gleichungssystem eines isotropen, ideal-plastischen Körpers wird angesetzt mit allgemeiner Fließbedingung, $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ (σ_i Hauptspannungen), und von einem plastischen Potential abgeleiteter Beziehung zwischen den Tensoren der Spannung und Deformationsgeschwindigkeit. Daraus wird ein ebenes System gewonnen, das einerseits den Fall von „plane stress“ deckt für Metalle, andererseits den Fall nichtmetallischen Materials. Dieses Gleichungssystem wird untersucht, insbesondere bezüglich Integration (Linearisierung, Charakteristiken usw.). Auch Fragen angenäherter Integration im Zusammenhang mit Randproblemen des Systems werden berührt.

Summary. We consider the complete system of equations of an isotropic perfectly plastic body assuming a general yield condition, $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ (σ_i = principal stresses), and a relation between the tensors of stress and of strain velocity, derived from a plastic potential. From this a plane system is obtained which covers both the cases of “plane stress” of a ductile

³ W. Embacher: Vektorielle Ausgleichsrechnung. Dissertation, Technische Hochschule Wien, April 1949.

* Vortrag, gehalten an der Technischen Hochschule Wien am 4. Oktober 1951.

metal and that of plane strain of a general material (like clay, ice). The integration of this system is investigated (linearization, characteristics, etc.). Also questions of approximate integration are mentioned in connection with remarks on boundary value problems.

Résumé. On considère le système complet d'équations d'un corps parfaitement plastique sous l'hypothèse d'une condition de plasticité générale, $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ (σ_i tensions principales), et d'une relation entre les tenseurs des tensions et des vitesses de déformation dérivée d'un potentiel plastique. On en déduit un système plane général, se rapportant et aux métaux ductiles (en cas des « tensions planes » et des « déformations planes ») et aux matériaux non métaux comme terres, etc. On étudie l'intégration de ce système complet (linéarization, caractéristiques, etc.) en ajoutant des remarques concernant les problèmes de l'intégration approchée et les problèmes aux limites.

Plastizitätstheorie ist die Theorie der Spannungen und Deformationen („strain and stress“) jenseits der Elastizitätsgrenze. Das Grundprinzip der Elastizitätstheorie in Hookes bekannter Fassung: „Ut tensio sic vis“ drückt aus, daß eine ein-eindeutige Beziehung zwischen Spannung und Deformation angenommen wird. In der klassischen Elastizitätstheorie, in der unendlich kleine Verrückungen betrachtet werden, hängen die Deformationen von den Ableitungen der Verrückungen linear ab; außerdem setzt man eine lineare Beziehung zwischen den Tensoren der Spannung und der Deformation voraus. Man hat auch gelegentlich nicht lineare Beziehungen

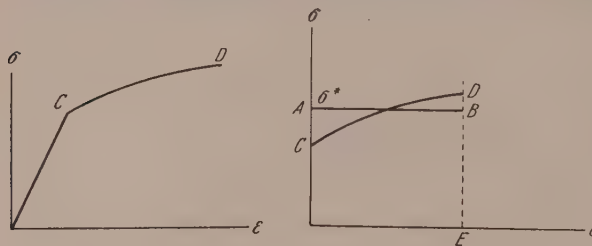


Abb. 1.

zwischen Spannung und Deformation studiert; doch wird an dem Prinzip ein-eindeutiger gegenseitiger Abhängigkeit von Spannung und Deformation festgehalten. Es handelt sich in einer solchen Theorie um eine nicht lineare Elastizitätstheorie, doch nicht um eine Plastizitätstheorie.

Sprechen wir nun anderseits von einem plastischen Grundphänomen.

Im Falle der Zugbeanspruchung eines dehnbaren Metallstabes weist das Spannungs-Dehnungsdiagramm die folgende (Abb. 1) wohlbekannte Gestalt auf: Zunächst eine durch den Anfangspunkt gehende geneigte Gerade entsprechend dem elastischen Zustande; daran anschließend eine nur schwach geneigte Linie, deren Richtung sich der horizontalen nähert. In diesem letzteren Bereich ist die Bezeichnung zwischen Spannung und Dehnung nicht mehr reversibel, daher nicht mehr ein-eindeutig. Eine einfache Idealisierung dieser — hier schon in beträchtlicher Schematisierung wiedergegebenen — Verhältnisse besteht darin, den Teil CD des Diagramms durch eine Horizontale zu ersetzen. (Dabei kann man nachträglich der sog. Verfestigung insofern Rechnung tragen, daß man eine mittlere Spannung, σ^* , an Stelle der zum Punkte C gehörenden Spannung in die Gleichung dieser Geraden, $\sigma = \sigma^*$, einführt.) Entscheidend ist, daß gemäß dieser Vorstellung sich die Spannung jenseits einer gewissen Beanspruchung nicht mehr ändert, sondern dauernd einen festen Wert beibehält, auch wenn nun die Beanspruchung beliebig vergrößert wird. Die Existenz einer solchen Grenze, $\sigma = \sigma^*$, ist eine der wesentlichen Hypothesen der Theorie des sog. ideal- oder perfekt-plastischen Körpers. Zur Behandlung des allgemeinen Falles ist noch eine zweite unabhängige Hypothese erforderlich. Diese spricht aus, daß die Spannungen in bestimmter Weise, nicht mehr wie in der Elastizitätstheorie mit den Deformationen, sondern nun mit den Deformationsgeschwindigkeiten zusammenhängen. Ehe wir weitergehen, wollen wir einige historische Bemerkungen einschalten.

Man mag den Beginn der wissenschaftlichen Plastizitätstheorie in der 1868 erschienenen Arbeit des Österreichischen Ingenieurs Tresca¹ sehen, der, gestützt auf

¹ H. Tresca: Mém. prés. par divers savants 18, 733—799 (1868); 20 (1872).

Beobachtungen, die treffende Hypothese aufstellte, daß ein Metall zu fließen beginnt, sobald die absolut größte Schubspannung einen gewissen Wert erreicht. 1870 wurde Trescas Kriterium von B. de Saint Venant² aufgenommen, der eine auf den rationalen Begriffen der Kontinuitätsmechanik basierte Theorie entwickelte; in diesem Sinne ergänzte er Trescas Kriterium durch eine Beziehung zwischen Spannungen und Deformationsgeschwindigkeiten, der gemäß die entsprechenden Tensoren koaxial sind. Saint Venants Theorie beschränkte sich auf den ebenen Fall; M. Lévy³ verallgemeinerte die Tresca-Saint Venantschen Ansätze auf den dreidimensionalen Fall. 1913 formulierte v. Mises⁴ eine allgemeine Theorie dessen, was man heute als „ideal plastischen Körper“ bezeichnet. Er verallgemeinerte und präziserte die Idee der „Plastizitätsgrenze“ und schlug insbesondere eine von der Trescaschen verschiedene Form der Plastizitätsgrenze vor, die heute weitgehend angenommen und benützt wird. Wir wollen nun die Gleichungen dieser Saint Venant-Miseschen Theorie des ideal plastischen Körpers, die den Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen bilden wird, kurz angeben.

Zunächst gelten in jedem Punkt des plastischen Körpers und zu jeder Zeit die Bewegungsgleichungen. Insofern für die langsamen Deformationen, die wir im allgemeinen betrachten, die Beschleunigungen vernachlässigbar sind, treten Gleichgewichts- an Stelle von Bewegungsgleichungen. Es bezeichne $\bar{\gamma}$ den Resultantvektor aller äußeren Kräfte auf die Volumeinheit bezogen, \bar{v} den Vektor der Fließgeschwindigkeit, Σ den Spannungstensor. Die Gleichgewichtsbedingungen, falls $\bar{\gamma} = 0$, lauten dann, mit üblichen Bezeichnungen für die Spannungen, wobei man insbesondere $\tau_{xy} = \tau_{yz}$ usw. setzt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{I}$$

oder in kurzer tensorieller Form

$$\operatorname{div} \Sigma = 0.\tag{I'}$$

Dies sind drei Gleichungen für sechs Unbekannte. Sodann gilt die mehrfach erwähnte „Plastizitätsbedingung“, die die Verallgemeinerung der oben benutzten Beziehung $\sigma = \sigma^*$ darstellt. Diese Bedingung stellt in jedem Fall fest, daß nur eine bestimmte fünfdimensionale Mannigfaltigkeit von Spannungen mit vollplastischem Zustand vereinbar ist. Die von Mises vorgeschlagene Form dieser Bedingung ist

$$\begin{aligned}q \equiv (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) - 8K^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \\ &+ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8K^2 = 0;\end{aligned}\tag{II}$$

die σ_i sind hier die „Hauptspannungen“. Es folgt endlich die Beziehung zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit: Man erkennt, daß der Tensor, Σ , selbst in dieser nicht auftreten kann, da Erfahrung lehrt, daß unter dem Einfluß eines allseits gleichen Druckes plastisches Fließen nicht eintritt. Bezeichnet man mit $-p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ die mittlere Normalspannung, mit J die Einheitsmatrix, mit $\Sigma' = \Sigma + pJ$ den reduzierten Spannungstensor, für den $\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$ gilt, so steht in unserer Theorie dies Σ' in Beziehung zum Tensor, \dot{E} , der Deformations-

² B. de Saint Venant: C. R. hebd. Séances Acad. Sci. **70**, 473—480 (1870).

³ M. Lévy: C. R. hebd. Séances Acad. Sci. **70**, 1323—1325 (1870).

⁴ R. v. Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1913**, 582—592.

geschwindigkeit, ähnlich wie in der Theorie der zähen Flüssigkeiten. Wenn dann v_x, v_y, v_z die Komponenten des Vektors der Fließgeschwindigkeit sind, so bezeichnen wir in üblicher Weise mit $\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \dots$ die Dehnungsgeschwindigkeiten, mit $\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \dots$ die Verzerrungsgeschwindigkeiten, und der Tensor \dot{E} ist dann durch

$$\dot{E} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_z & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_y \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_z & \dot{\epsilon}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_x \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_x & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix}$$

gegeben. Nun wird angesetzt, daß in jedem Augenblick und an jedem Ort die Tensoren Σ' und \dot{E} proportional sind,

$$\Sigma' = k \dot{E}. \quad (\text{III})$$

Doch ist, im Gegensatz zur Theorie der zähen Flüssigkeiten, k hier nicht eine Konstante, sondern (wenn wir von der Zeit absehen, alles für einen bestimmten Moment betrachten) eine unbekannte Funktion der Koordinaten $k = k(x, y, z)$, die lediglich der Ungleichung $k \geq 0$ unterworfen ist, und als unbekannte Variable in unser Gleichungssystem eingeht. In Koordinaten

$$\begin{aligned} \sigma_x' = \sigma_x + p &= k \dot{\epsilon}_x, & \sigma_y' &= k \dot{\epsilon}_y, & \sigma_z' &= k \dot{\epsilon}_z, \\ \tau_x &= \frac{1}{2} k \dot{\gamma}_x, & \tau_y &= \frac{1}{2} k \dot{\gamma}_y, & \tau_z &= \frac{1}{2} k \dot{\gamma}_z. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Es ist für das Folgende wichtig, daß man (III) auch in anderer Form schreiben kann: Bezeichnen wir mit $h(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z)$ eine differenzierbare Funktion der sechs Spannungskomponenten und mit Grad h den derivierten Tensor von h , d. h. den Tensor

$$\text{Grad } h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \sigma_x} & \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau_z} & \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau_y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau_z} & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau_y} & \dots & \frac{\partial h}{\partial \sigma_z} \end{pmatrix}.$$

Dann sieht man, daß Grad $q = 6 \Sigma'$, und daß man daher (III) auch durch

$$\text{Grad } q = k \dot{E} \quad (\text{III}')$$

ersetzen kann.

Von den sechs Gleichungen (III) sind nur fünf voneinander unabhängig, da einerseits

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0,$$

andererseits die Kontinuitätsgleichung gilt

$$\text{div } \bar{v} = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0, \quad (\text{IV})$$

die hier die weitgehend zutreffende Inkompressibilität des plastischen Materials ausdrückt. Wir haben also im ganzen zehn Gleichungen (I), ... (IV) mit ebensovielen Unbekannten, den sechs Komponenten von Σ , den dreien von \bar{v} und der Proportionalitätsfunktion k .

Aus diesem System leiten wir ein ebenes ab, indem wir aus der Elastizitätstheorie bekannte Ansätze entsprechend modifizieren; diese beiden Ansätze werden im wesentlichen durch die Annahmen, $\dot{\epsilon}_3 = 0$, einerseits, $\sigma_3 = 0$ andererseits charakterisiert.

Wenn man die erste dieser Annahmen („plane strain“) auf (II) anwendet und (III) beachtet, so ergibt eine einfache Rechnung das bekannte Resultat, daß diese Beziehung sich auf

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \text{konst.} \quad (\text{a})$$

reduziert. Nun gilt außerdem die gleichfalls wohlbekannte Tatsache, daß für $\dot{\epsilon}_3 = 0$ die oben erwähnte, von (II) verschiedene räumliche Bedingung von Tresca-Saint Venant-Lévy sich gleichfalls auf (a) reduziert. Dies, sowie die verhältnismäßige Einfachheit von (a), oder besser der auf (a) beruhenden Theorie, hat dazu geführt, daß man fast ausschließlich diese Gleichung als die ebene Fließbedingung betrachtet und studiert hat.

Der durch $\sigma_3 = 0$ charakterisierte ebene Fall („plane stress“) ist der wichtige Fall einer ebenen Scheibe, die parallel zu ihrer Mittelebene an ihrem Umfang beansprucht wird. Weder der dreidimensionale Ansatz von Mises noch der von Saint Venant führen dann zu (a) oder zu einer in ihren Konsequenzen ähnlich einfachen Gleichung; unter Annahme der nun resultierenden Bedingungen wird das mathematische Problem ein wesentlich schwierigeres, wie wir im folgenden im Detail sehen werden. Um diese neuen Typen zu studieren, scheint es natürlich, ein ebenes Problem mit weitgehend allgemeiner Fließbedingung anzusetzen und zu studieren, um so zum Verständnis des mathematischen Tatbestandes und zu einer Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten zu gelangen.

Es sei noch bemerkt, daß auch der Ansatz des „plane strain“, $\dot{\epsilon}_3 = 0$, auf allgemeinere nicht metallische Materialien, wie Ton oder Eis, angewandt, zur Betrachtung von (a) verschiedenen Fließbedingungen führt.

Will man ein ebenes Problem mit allgemeiner Fließbedingung in angemessener Weise formulieren, d. h. so allgemein als es sich mit notwendigen Einschränkungen verträgt, so empfiehlt es sich, wieder vom dreidimensionalen Problem auszugehen, allerdings von einem allgemeineren als dem eben behandelten.

Die Gleichgewichtsbedingungen bleiben offenbar ungeändert. An Stelle der Funktion q in (II) führen wir jetzt eine weitgehend allgemeine Plastizitätsfunktion $g(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z)$ ein; diese muß im Fall des isotropen Körpers eine Invariante des Spannungstensors, Σ , sein, und folglich eine symmetrische Funktion der drei Hauptspannungen, σ_i ; also

$$g(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z) = G(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (\text{II}')$$

Ferner soll, wie oben erwähnt, g eine solche Funktion der Spannungen sein, die nur von den $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ abhängt ($\Sigma' = \Sigma + pJ$) oder, was auf dasselbe herauskommt, eine Funktion, in die außer den τ nur die Differenzen der σ_i eingehen; dies ist gewährleistet, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial G}{\partial \sigma_3} = 0 \quad (\text{II}')$$

erfüllt ist. Es besteht kein Grund hier auf weitere Eigenschaften der Plastizitätsfläche (II'), wie z. B. Konvexität, etc. einzugehen.

Gleichzeitig verallgemeinern wir die Beziehung (III). Wir sahen, daß sich diese von einem „plastischen Potential“, q , ableiten ließ; es scheint angemessen — wir werden später den Grund sehen —, auch die allgemeine Beziehung von einem plastischen Potential, h , abzuleiten, so daß analog zu (III') nun einfach

$$\text{Grad } h = k \dot{E} \quad (\text{III}'')$$

tritt, wobei Grad h oben (S. 302) definiert wurde. Aus denselben Gründen wie eben müssen wir annehmen, daß

$$h(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z) = H(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial h}{\partial \sigma_z} = \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial H}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial H}{\partial \sigma_3} = 0. \quad (\text{III}''')$$

1928 hat v. Mises⁵ in einer Untersuchung über die Plastizität der Kristalle die Idee eines „plastischen Potentials“ eingeführt; er fügte die spezielle Hypothese hinzu, daß dieses plastische Potential, h , gleich der Fließfunktion, g , zu nehmen sei, eine Annahme, die durch ein Minimumprinzip ausgezeichnet ist und, wie wir sehen werden, mathematisch besonders einfach wird; trotzdem wollen wir uns nicht von vornherein darauf festlegen.

Die Kontinuitätsgleichung (IV) bleibt ungeändert. Man sieht, daß wegen der zweiten Gl. (III''') Gl. (IV) mit (III'') verträglich ist.

Es sei bemerkt, daß die Annahme $g \neq h$ nicht notwendig eine ausgefallene und überflüssige Verallgemeinerung darstellt. Wenn man z. B. das obige System (I), (III), (IV) betrachtet, aber an Stelle von (II) mit der Tresca-Saint Venantschen Fließbedingung, $\tau_{\max} = \text{konst.}$, arbeitet, so ist damit ein plastisches Potential $h = q$ angenommen, während g jetzt von h verschieden ist; ähnliches gilt natürlich, wenn man (I), (III), (IV) mit irgendeiner von $q = \text{konst.}$ verschiedenen Fließbedingung kombiniert.

Von unserem Ansatz (I), (II'), (III''), (IV) leiten wir nun wieder je ein ebenes Problem ab, nämlich mittels der Annahmen

$$1. \quad \sigma_z = \sigma_3 = 0, \quad \tau_x = \tau_y = 0,$$

die übrigen Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ unabhängig von z .

$$2. \quad \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_3 = 0, \quad \dot{\gamma}_x = \dot{\gamma}_y = 0,$$

die übrigen Spannungs- und Deformationskomponenten unabhängig von z .

Das Resultat einer detaillierten Untersuchung⁶, die ich übergehe, ist, daß beide Spezialisierungen zu ganz ähnlichen ebenen Problemen führen, mit dem einzigen Unterschied, daß in 2. eine gewisse einschränkende Zusatzbedingung identisch erfüllt ist. Die resultierenden Gleichungen sind, mit $\tau = \tau_z, \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_z$:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = F(\sigma_1, \sigma_2) = 0; \quad (2)$$

$$k \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial h}{\partial \sigma_x}, \quad k \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial h}{\partial \sigma_y}, \quad k \dot{\gamma} = \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad (k \geq 0). \quad (3)$$

Dies sind sechs Gleichungen für die sechs Variablen $\sigma_x, \sigma_y, \tau, v_y, v_x, k$. Die Funktion, h , von (III''') ist eine gegebene differenzierbare Funktion der Spannungen. Im Falle 2 sieht man, daß aus $\dot{\varepsilon}_3 = 0$ auch $\frac{\partial H}{\partial \sigma_3} = 0$ folgt, also ist wegen (III'') und (IV) in diesem Falle identisch

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial H}{\partial \sigma_2} = 0. \quad (4)$$

Es sind dann von den Gl. (3) nur zwei unabhängig, zu denen (4) als dritte hinzutritt. Diese Bedingung (4) — ebene Inkompressibilität — vereinfacht das ganze Problem; wenn $f = h$ und (4) erfüllt ist, so unterscheidet sich das Problem (1), (2), (3) nur unwesentlich von dem speziellen Problem, dem die Fließbedingung (a) zugrunde liegt und bei dem (3) durch

⁵ R. v. Mises: Z. angew. Math. Mech. 8, 161—185 (1928).

⁶ H. Geiringer: First Natl. Congress Appl. Mechanics Chicago June 1951 to appear in Proceedings of this Congress.

$$\dot{\varepsilon}_x : \dot{\varepsilon}_y : \dot{\gamma} = (\sigma_x - \sigma_y) : (\sigma_y - \sigma_x) : 4 \tau_z \quad (b)$$

ersetzt ist. Wir wollen eine Fließfunktion, f , oder ein plastisches Potential, h , orthogonal nennen, wenn die Bedingung (4) zutrifft und wenn $h = f$ und (4) erfüllt, von einem orthogonalen Problem sprechen. (1), (2), (3) ohne Zusatzbedingung bezeichnen wir als allgemeines, komplettes ebenes Problem des ideal plastischen isotropen Körpers. Das Wort allgemein weist auf die verallgemeinerte Fließbedingung und die entsprechende Beziehung (3) hin; „komplett“ deutet an, daß unser Ziel ist, Spannungen und Geschwindigkeiten zu bestimmen.

Zu letzterem Punkt seien noch einige Worte hinzugefügt. Die drei Gl. (1), (2) enthalten nur die drei Spannungen, es ist also bis zu einem gewissen Grad möglich, diese drei Gleichungen für sich allein zu betrachten, ihre Eigenschaften zu untersuchen und partikuläre Integrale für sie aufzusuchen. Dies war der Standpunkt einer großen Zahl von Arbeiten, die sich mit dem durch (1), (a), (b) definierten „speziellen“ Problem beschäftigen. Auch im allgemeineren Fall sind zunächst die Gl. (1), (2) für sich allein untersucht worden. Wir wollen einige Namen nennen: 1946 wurden die Gl. (1), (2) von Sokolovsky⁷ untersucht, für die beiden speziellen Fließbedingungen (nicht orthogonale Fälle), die sich aus dem Misesschen und dem Saint Venantschen Ansatz jeweils durch die Annahme $\sigma_3 = 0$ ergeben. Auch Neuber⁸, v. Mises⁹, Sauer¹⁰, Hodge¹¹, Geiringer¹² beschäftigen sich bloß mit dem „Spannungsproblem“ (1), (2)¹³. Das komplette System (1), (2), (3) wurde von Hodge¹⁴, Hill¹⁵, Geiringer^{6, 16} betrachtet. Soweit es sich um Partikularlösungen des kompletten Systems handelt, ist einfach eine aus (1), (2) gewonnene Lösung in (3) einzutragen, worauf man, nach Elimination von k , ein lineares System für v_x, v_y erhält. Wir kommen darauf, sowie auf die Schwierigkeiten, die mit kompletten Randwertaufgaben verknüpft sind, noch zurück. Bemerken wir hier nur folgendes:

Selbst bei den einfachsten Randwertproblemen werden sich die Randbedingungen teils auf Spannungen, teils auf Geschwindigkeiten beziehen; auch wird im allgemeinen die Grenze zwischen plastischem Material und elastischem (oder starrem) nicht von vornherein bekannt sein, vielmehr stellt die Bestimmung dieser freien Grenze, an der gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen, einen Teil der Aufgabe dar. (In einem „plastisch-starren“ Problem — im Gegensatz zu „plastisch-elastischen“ — läßt sich zeigen, daß die genannte Grenze eine Charakteristik sein muß oder eine Einhüllende von Charakteristiken, wobei im nicht orthogonalen Fall merkwürdige Einschränkungen

⁷ V. V. Sokolovsky: C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **51**, 431—434, 175—178 (1946).

⁸ H. Neuber: Z. angew. Math. Mechan. **28**, 253—257 (1948).

⁹ R. v. Mises: Reissner Anniversary Volume, Ann Arbor **1949**, 415—429.

¹⁰ R. Sauer: Z. angew. Math. Mechan. **29**, 274—279 (1949).

¹¹ G. P. Hodge Jr.: J. Math. Physics **29**, 38—48 (1950).

¹² H. Geiringer: Bull. Amer. math. Soc. **56**, 38/39 (1950); ausführlicher in: Office Naval Research, Techn. Rep. 55, Providence 1950.

¹³ Mehrere Monate nach Abhaltung dieses Vortrages wurde ich mit der Thesis von J. Mandel (Sur les équilibres par tranches parallèles des milieux plastiques à la limite d'écoulement. Paris: Louis Jean. 1942) bekannt. Man ersieht daraus, daß Mandel schon 1942, also früher als all die genannten Autoren, das Problem (1), (2) studierte und fast alle entscheidenden Ergebnisse fand. Sein Ausgangspunkt ist die Betrachtung der Mohrschen Kreise und ihrer Einhüllenden, wobei er sich allerdings auf den „reellen“ Kontakt (der dem „hyperbolischen“ Fall entspricht) beschränkt, was die Vollständigkeit seiner Resultate beeinträchtigt. In anderer Hinsicht gehen seine Ergebnisse über die hier berührten hinaus (singuläres Verhalten usw.). — Andererseits wird es dem Leser der Arbeit Mandels und der hier genannten Arbeiten klar scheinen, daß diese Autoren ihre Ergebnisse unabhängig von Mandel fanden.

¹⁴ G. P. Hodge Jr.: An Introduction to the theory of perfectly plastic solids, O N R, Providence 1950.

¹⁵ R. Hill: The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press. 1950.

¹⁶ H. Geiringer: Proc. nat. Acad. Sci. USA **37**, 214—220 (1951).

für diese Charakteristik auftreten.) Jedenfalls können die einem konkreten Problem entsprechenden tatsächlichen Spannungen (im Gegensatz zu Partikularlösungen) nur dann aus (1) und (2) allein ermittelt werden, wenn man genügend Spannungs-Randbedingungen kennt, um die Spannungen eindeutig festzulegen; wenn dies zutrifft, so kann die gefundene Spannung in (3) eingesetzt und die Geschwindigkeiten und k aus (3) und den restlichen Randbedingungen bestimmt werden. Wenn aber die Randbedingungen nicht in dieser Weise zerfallen, so muß das ganze Randwertproblem simultan behandelt werden. Es fehlt an Zeit, diese Verhältnisse an Beispielen zu erläutern. Es mag bemerkt werden, daß Mises schon 1925¹⁷ diese Verhältnisse im wesentlichen aufgeklärt hat, worauf ich 1930¹⁸, die Wichtigkeit des kompletten Problems betonend, die charakteristischen Grundgleichungen für die Geschwindigkeiten angab. In den letzten Jahren, die besonders starkes Interesse an den Problemen der Plastizitätstheorie gebracht und zur vollständigen Lösung vieler Einzelprobleme sowie zur Vertiefung der Auffassung geführt haben, wird von den Forschern, denen dieser Fortschritt wesentlich zu danken ist, der erwähnte Standpunkt energisch betont und weiterentwickelt (wir nennen hier Hill, Lee, Prager und verweisen für weitere wichtige Beiträge und für Literaturangaben auf das genannte Werk von Hill¹⁵, sowie auf das nach Abhaltung dieses Vortrages erschienene Buch von Prager¹⁹).

Wenden wir uns nun zur näheren Betrachtung des Spannungsproblems (1), (2). Mittels (2) kann man auf vielfache Art eine Spannungsgröße eliminieren, so daß man ein System von zwei Differentialgleichungen für zwei Bestimmungsstücke des Spannungstensors erhält. Das so erhaltene System ist nicht linear, aber von einem Typus, den man gelegentlich „reduzibel“ nennt, auch „quasilinear“. Man betrachte zwei in den ersten Ableitungen lineare Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$a_i \frac{\partial u}{\partial x} + b_i \frac{\partial u}{\partial y} + c_i \frac{\partial v}{\partial x} + d_i \frac{\partial v}{\partial y} = e_i, \quad (i = 1, 2),$$

wo die a_i, \dots, e_i im allgemeinen von x, y, u, v abhängen. Wenn die a_i, \dots, d_i nur von x, y abhängen und die e_i in u, v linear sind, so ist das System ein lineares. Wenn die a_i, \dots, d_i nur von u, v abhängen und die $e_i = 0$, so heißt das System *reduzibel*, da ein solches offenbar, wenn man die Rolle von abhängigen und unabhängigen Variablen vertauscht in ein lineares übergeht. Auch die in der Mechanik kompressibler Flüssigkeiten auftretenden Systeme, sowohl das mit den unabhängig Variablen x, y , wie auch das mit x, t (Zeit) sind *reduzibel*, und dies bildet die mathematische Basis der dort angewandten Transformationen von Chaplygin, Mölenbrock u. a.

Um, entsprechend der Isotropie (1), (2) durch ein möglichst symmetrisches System zu ersetzen, wählen wir als die zwei Bestimmungsstücke von Σ die folgenden: Den Winkel, der das Hauptachsenkreuz ξ, η der Richtung nach festlegt; wir setzen $\sigma_2 \geq \sigma_1$ voraus, nennen ξ die erste Hauptrichtung und $\vartheta = (x, \xi)$; ferner führen wir einen Parameter, s , ein, der symmetrisch von σ_1 und σ_2 abhängt und zur parametrischen Darstellung von $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ dient, so daß diese Gleichung gleichwertig ist mit

$$\sigma_1 = \sigma_1(s), \quad \sigma_2 = \sigma_2(s). \quad (5)$$

Setzt man noch

$$\frac{d\sigma_i}{ds} = \sigma_i', \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1'} = p, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2'} = q, \quad (6)$$

so erhält man nach einiger Rechnung an Stelle von (1), (2) die Gleichungen

¹⁷ R. v. Mises: Z. angew. Math. Mechan. 5, 147—149 (1925).

¹⁸ H. Pollaczek-Geiringer: Ber. III. Intern. Kongr. Techn. Mech., Bd. II. Stockholm. 1930.

¹⁹ W. Prager und G. P. Hodge Jr.: Theory of perfectly plastic solids. New York: Wiley. 1951.

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = p \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = q \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Hier stellen $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}$ Richtungsableitungen in Richtung der Hauptachsen dar. Man darf (7) als ein reduzibles System ansehen, und es ist erlaubt durch Vertauschung von ξ, η mit s, ϑ es in ein lineares System mit s, ϑ als unabhängige Variablen zu transformieren. Man findet, falls die Funktionaldeterminante $\partial(s, \vartheta)/\partial(\xi, \eta)$ nicht verschwindet,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} = p(s) \frac{\partial \xi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = q(s) \frac{\partial \eta}{\partial s}. \quad (8)$$

Die Gl. (8) sind linear. Man kann aus ihnen in vielfacher Weise andere lineare Gleichungen ableiten für x, y oder für andere geeignete Koordinaten in der x - y -Ebene (physical plane). Setzt man z. B.

$$X = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad Y = y \cos \vartheta - x \sin \vartheta,$$

so erhält man das System

$$\frac{\partial X}{\partial \vartheta} = q \frac{\partial Y}{\partial s} + Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} = p \frac{\partial X}{\partial s} - X$$

oder die eine Gl. 2. Ordnung z. B. für X

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \vartheta^2} - p q \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} = -X + \frac{\partial X}{\partial s} (p' q + p - q).$$

Natürlich folgt zu einem dieser Gleichung genügenden X das zugehörige Y dann durch die obige Gleichung erster Ordnung. Andere zweckmäßige Gleichungen zweiter Ordnung können angegeben werden (s. auch ¹⁰). Auf sie können dann die klassischen Integrationsmethoden angewandt werden, Reihenentwicklungen, Separation der Variablen usw., oder auch moderne Operatorenmethoden. Andererseits ist es klar, daß in einem Problem die Randbedingungen fast immer in der x - y -Ebene und nicht in der s - ϑ -Ebene (der „Spannungsebene“) gegeben sind. Dies ist eine analoge Schwierigkeit, wie sie in der Theorie der kompressiblen Flüssigkeiten auftritt. Es mag noch bemerkt werden, daß die Linearisierungen, die in der speziellen, auf (a) beruhenden Plastizitätstheorie üblich sind, mit etwas anderen Variablen arbeiten, nämlich mit charakteristischen Koordinaten als unabhängig Variablen; diese stehen allerdings in engstem Zusammenhang mit unseren Variablen, s, ϑ . Wir werden darauf zurückkommen.

Wir wenden uns jetzt den Charakteristiken unseres Problems zu. Unser System besteht jetzt aus den Gl. (7), (3), ein System von vier Gleichungen mit x, y als unabhängig, s, ϑ, v_x, v_y als abhängigen Variablen. Schreiben wir, indem wir für diese letzteren u_1, \dots, u_4 setzen, es in der Form

$$L_i = \sum_{k=1}^4 \left(a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) = c_i, \quad (i = 1, \dots, 4)$$

und bezeichnen mit $\lambda = dx, \mu = dy$ Differentiale in Richtung der Charakteristiken, so sind die charakteristischen Richtungen μ/λ durch die Determinante

$$\| \mu a_{ik} - \lambda b_{ik} \| = 0$$

bestimmt. Die linke Seite ist eine Determinante vierter Ordnung, deren in der i -ten Zeile und k -ten Spalte stehendes Element gleich $\mu a_{ik} - \lambda b_{ik}$ ist; diese Gleichung vierter Ordnung definiert in jedem Punkt vier natürlich nicht notwendig reelle und nicht notwendig voneinander verschiedene Richtungen. Zu einer m -fachen Wurzel der Gleichung gehören m Kompatibilitätsbedingungen (so heißt eine Beziehung zwischen den Ableitungen der u_k nach einer charakteristischen Richtung; eine solche kann sich natürlich auf eine endliche Beziehung entlang einer Charakteristik reduzieren). Der Fall $m = 2$ tritt, wie wir sehen werden, tatsächlich auf.

Für unser Problem (7), (3) sieht man, daß (7) nur die Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ enthält, während in (3) nur $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, \dots , $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ vorkommen. In den ersten beiden Zeilen der obigen Determinante stehen daher an dritter und vierter Stelle Nullen und ebenso in den beiden letzten Zeilen an erster und zweiter Stelle. Sie zerfällt daher in zwei Determinanten zweiter Ordnung; wir sehen somit, daß man sämtliche Charakteristiken von (1), (2), (3) erhält, wenn man getrennt die von (3) und von (7) bestimmt.

Bezeichnen wir mit φ den Winkel, den eine Charakteristik von (7) mit der ersten Spannungshaupttrichtung, der ξ -Richtung, einschließt, so folgt sofort aus der obigen Determinante, daß mit $F_i = \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}$.

$$\left. \begin{aligned} \tan^2 \varphi &= \frac{p}{q} = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = -\frac{F_1}{F_2}, \\ \tan \varphi &= \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{-\frac{F_1}{F_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Bezeichnet man mit γ , γ' die Winkel, die diese Charakteristiken, die wir C , C' nennen, mit der x -Achse bilden, so ist

$$\gamma = \vartheta + \varphi, \quad \gamma' = \vartheta - \varphi. \quad (10)$$

Man sieht aus (10), daß und wie die Charakteristiken von der Lösung abhängen, da $\gamma = \vartheta + \varphi(s)$. Die Charakteristiken sind reell und voneinander verschieden, dort, wo $F_1 F_2 < 0$. Die Beziehung (9) hat eine einfache geometrische Bedeutung. Schreiben wir sie in der Form

$$F_1 \cos^2 \varphi + F_2 \sin^2 \varphi = 0, \quad (9')$$

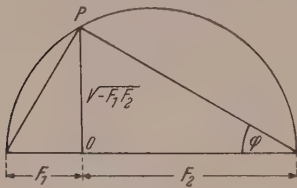


Abb. 2.

so sieht man, daß die linke Seite die zur charakteristischen Richtung gehörende Skalarkomponente des Tensors Grad f bedeutet. Eine charakteristische Richtung des Spannungsproblems ist eine für die diese Skalarkomponente verschwindet. Wieder sieht man, daß solche reelle Richtungen existieren, wenn F_1 und F_2 verschiedenes Vorzeichen haben. Sehr anschaulich werden diese einfachen Verhältnisse am Mohrschen Kreise des Tensors Grad f dargestellt (Abb. 2); ein Tensor A ordnet jeder durch einen Winkel δ gegebenen Richtung m (Winkel δ mit irgendeiner festen Richtung) einen Vektor a zu, der seinerseits in eine „Normalspannung“ (in Richtung von m) $(A)_{mm}$ und in eine dazu normale „Schubspannung“ zerlegt werden kann; trägt man diese als Abszisse und Ordinate eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf, so ist es die wichtigste Eigenschaft des Mohrschen Kreises, daß er zu jedem (so zerlegten) Vektor sofort die zugehörige Richtung, δ , angibt. Hier, wenn man von einem O aus, gemäß der Definition des Mohrschen Kreises nach rechts F_2 , nach links F_1 aufträgt, so „gehört“ zum Punkte P mit Abszisse O und Ordinate $\sqrt{-F_1 F_2}$ der Winkel $\delta = \varphi$.

Im allgemeinen treten bei derselben Plastizitätsbedingung hyperbolische, parabolische und elliptische Bereiche auf, die durch Intervalle des Parameters, s , charakterisiert sind. Man wird solche Plastizitätsbedingungen bevorzugen, für die, wenn möglich, das zugehörige Problem diesen Wechsel des Typus nicht aufweist; dies gilt vor allem von den „orthogonalen“ Bedingungen, bei denen, wie wir wissen, $F_1 + F_2 = 0$, daher $\varphi = \frac{\pi}{4}$, also sogar konstant, was eine besondere Vereinfachung bedeutet; die Charakteristiken bilden daher hier ein orthogonales Netz.

Kehren wir zu (7) zurück. Die Bilder der C , C' in der s - ϑ -Ebene sind fixe Kurven, Γ , Γ' , die ein für allemal durch die [auch aus (8) folgende] Differentialgleichung

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{pq}}, \quad \text{wo } pq = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{\sigma_1' \sigma_2'} \quad (11)$$

gegeben sind. Setzen wir

$$\int \frac{ds}{\sqrt{pq}} = G(s),$$

so erhalten wir die längs einer C oder C' geltenden Kompatibilitätsbedingungen, gleichzeitig die Gleichungen der Γ -Kurven, in der endlichen Form

$$\vartheta - G(s) = \text{konst.}, \quad \vartheta + G(s) = \text{konst.} \quad (11')$$

Diese verallgemeinern die den Hencky-Prandtlischen Sätzen des speziellen Problems zugrundeliegenden bekannten Beziehungen

$$\vartheta \mp \frac{s}{2} = \text{konst.}, \quad (11'')$$

die beziehungsweise entlang einer ersten oder zweiten „Gleitlinie“ gelten. ($\sigma_1 = K(s-1)$, $\sigma_2 = K(s+1)$ ist eine Parameterdarstellung von (a), wobei $s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2K$; dann ist $p q = 4$, $G(s) = s/2$.)

Betrachten wir als Beispiel die aus (II) durch $\sigma_3 = 0$ hervorgehende wichtige Bedingung („plane stress“):

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = 4K^2.$$

Man erhält mit $s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2K$ und $\sigma_2 \geq \sigma_1$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= K \left[s - \sqrt{\frac{4-s^2}{3}} \right], & \sigma_2 &= K \left[s + \sqrt{\frac{4-s^2}{3}} \right], \\ \sqrt{pq} &= \frac{4-s^2}{\sqrt{3-s^2}}, & \tan \varphi &= \frac{\sqrt{12-3s^2}-s}{2\sqrt{3-s^2}}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß in der σ_1 - σ_2 -Ebene die obige Bedingung durch eine Ellipse dargestellt ist, wobei s von -2 bis $+2$ geht. Für $|s| < \sqrt{3}$ sind zwei verschiedene reelle, für $s = \pm \sqrt{3}$ zusammenfallende, für $|s| > \sqrt{3}$ imaginäre Charakteristiken vorhanden. Die Gleichungen der Γ -Kurven sind

$$\pm \vartheta = \arctan \left(\frac{s}{\sqrt{3-s^2}} \right) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{s}{2\sqrt{3-s^2}} \right) + \text{konst.}$$

Das Netz dieser festen Γ -Kurven in der s - ϑ -Ebene entspricht dem wohlbekannten fixen Epicyclonidenetz der Gasdynamik. Wie bei jedem reduzierbaren Problem kann man dies Netz dazu verwenden, ausgehend von geeigneten Anfangswerten, das Netz der C , C' (d. h. im wesentlichen die Lösung der Aufgabe) in einem durch die Anfangswerte definierten Bereich angenähert zu konstruieren (Prandtl-Busemanns Konstruktion in der Gasdynamik).

Nun die Geschwindigkeitsgleichungen (3), die nach Elimination von k so geschrieben werden:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} : \frac{\partial v_y}{\partial y} : \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_x} : \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} : \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad (3')$$

Wählen wir zwei dieser Gleichungen und setzen ihre charakteristische Determinante an, wobei wir $\lambda = \cos \delta$, $\mu = \sin \delta$ setzen und mit δ den Winkel einer Charakteristik mit der x -Achse bezeichnen. Dann folgt:

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} \cos^2 \delta + \frac{\partial h}{\partial \tau} \cos \delta \sin \delta + \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} \sin^2 \delta = 0. \quad (12)$$

Die linke Seite stellt die Skalarkomponente des Tensors Grad h dar, in der Richtung, die mit der x -Achse den Winkel δ bildet. Bezeichnen wir mit ψ den Winkel dieser

Richtung mit der ersten Hauptrichtung des Tensors Grad h , so erhält man an Stelle von (12), wenn $H_1 = \frac{\partial H}{\partial \sigma_1}$, $H_2 = \frac{\partial H}{\partial \sigma_2}$ die Hauptwerte dieses Tensors bezeichnen,

$$H_1 \cos^2 \psi + H_2 \sin^2 \psi = 0 \quad (13)$$

und daraus

$$\tan^2 \psi = -H_1/H_2 \quad (13')$$

in voller Analogie zu (9') und (9). Diese neuen charakteristischen Richtungen sind reell und verschieden, wenn $H_1 H_2 < 0$. In diesem Fall bilden sie mit der x -Achse die Winkel

$$\delta = \vartheta + \psi, \quad \delta' = \vartheta - \psi, \quad (14)$$

dabei ist ϑ hier der Winkel, den die erste Hauptrichtung von Grad h mit der x -Achse bildet; eine einfache Rechnung zeigt aber, daß der Spannungstensor Σ und der Tensor Grad h gleiche Hauptrichtungen haben; daher hat ϑ in (14) die bisherige Bedeutung.

Es sind also im reellen Fall die Charakteristiken C , C' des Spannungsproblems, sowie die K , K' des Geschwindigkeitsproblems symmetrisch zur ersten Hauptrichtung von ξ . Es besteht ein bemerkenswerter Parallelismus: Das komplette Problem hängt von zwei Funktionen der Spannungen ab: $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = F(\sigma_1, \sigma_2)$ und $h(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = H(\sigma_1, \sigma_2)$. Aus diesen leitet man die Tensoren Grad f und Grad h ab; diese haben gleiche Achsenrichtungen mit Σ . Wenn $F_1 F_2 < 0$, gibt es zwei reelle voneinander verschiedene Richtungen, m , m' , die die Winkel $+\varphi$, $-\varphi$ mit der ξ -Richtung bilden, so daß

$$(\text{Grad } f)_{mn} = F_1 \cos^2 \varphi + F_2 \sin^2 \varphi = 0. \quad (9'')$$

Wenn $H_1 H_2 < 0$, so gibt es zwei Richtungen n , n' , die mit der ξ -Richtung die Winkel $\pm \psi$ bilden und

$$(\text{Grad } h)_{nn} = H_1 \cos^2 \psi + H_2 \sin^2 \psi = 0. \quad (13'')$$

Wenn $h = f$, so fallen die C mit den K , die C' mit den K' zusammen; wenn außerdem $F_1 + F_2 = 0$, so bilden die C , C' ein orthogonales Netz und es ist leicht zu sehen, daß die allgemeinste orthogonale Fließbedingung von der Form $K[(\sigma_2 - \sigma_1)] = 0$ sein muß, wo K eine willkürliche Funktion einer Variablen ist.

Andererseits, trotz der analogen Richtungsbedingungen, die sich für die zwei Gleichungsgruppen (7), (3) ergaben, sind die Kompatibilitätsbedingungen völlig verschieden. Die von (7), d. h. von (1), (2), sind, wie wir sahen, durch (11'') gegeben, geltend längs der C , C' . Die anderen kennen wir auch schon: Es folgt nämlich aus (3) in der Form $k \dot{E} = \text{Grad } h$, daß für die in (13) eingeführten n -Richtungen auch:

$$(\dot{E})_{nn} = \dot{\varepsilon}_1 \cos^2 \psi + \dot{\varepsilon}_2 \sin^2 \psi = 0 \quad (15)$$

gilt. Die Normaldehnung verschwindet entlang einer Geschwindigkeitscharakteristik, K oder K' . Es gibt also jedenfalls (auch wenn $f = h$) vier Kompatibilitätsbedingungen, von denen je eine entlang C , C' , K , K' (je zwei entlang C und C') gelten (da, wenn $f = h$, die charakteristische Determinante vierter Ordnung des Problems eine Doppelwurzel hat). Im Fall der speziellen Fließbedingung (a) spricht man von Gleitlinien; diese sind definiert als Kurven, die in jedem Punkt den Winkel der Hauptrichtungen halbieren; gleichzeitig sind sie in diesem orthogonalen Problem die doppelt zählenden Charakteristiken [gemäß (b) (s. S. 305) ist hier $f = h$]. Daher haben die Gleitlinien die folgenden Gruppen von Eigenschaften: Erstens gilt für jeden symmetrischen Tensor, z. B. für Σ oder für \dot{E} , daß mit Bezug auf die „45°-Richtungen“, μ und ν (so nennen wir kurz die Richtungen, die die Winkel der Hauptrichtungen halbieren) in der Hauptdiagonale von Σ nun $\sigma_{\mu\mu} =$

$= \sigma_{vv} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$, in der Nebendiagonale $\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$ steht, und letztere ist die absolut größte aller Schubspannungen. Ebenso gilt für \dot{E} : $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu}$ und $|\dot{\gamma}_{\mu\nu}| = \text{maximum}$. Nun ist bei Annahme von (a) gemäß (4) $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) = 0$ und diese Eigenschaft, zusammen mit der Extremum Eigenschaft von $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$, ist es, der die „Gleitlinien“ ihren Namen verdanken. Andererseits sind sie die Geschwindigkeitscharakteristiken, und die Eigenschaft $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu} = 0$ kommt ihnen auch in dieser Eigenschaft zu. Schließlich gelten, insofern sie Spannungscharakteristiken sind, entlang ihnen die aus $\vartheta + \frac{s}{2} = \text{konst.}$ abzuleitenden „Gleitliniensätze“.

In unserem allgemeineren Problem sind diese Eigenschaften auf drei verschiedene Kurvennetze verteilt: Entlang der, stets reellen, „45°-Linien“ ist $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu}$, aber nicht gleich Null, während $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$ immer noch ein Extremum ist. Hingegen ist $\dot{\epsilon}_{nn} = \dot{\epsilon}_{n'n'} = 0$ entlang der Geschwindigkeitscharakteristiken, falls $H_1 H_2$ negativ; und die oben genannte, die Hencky-Prandtl-Beziehung, verallgemeinernde Gl. (11') gilt längs der für negatives $F_1 F_2$ reellen Spannungscharakteristiken.

Ehe wir weitergehen, wollen wir ein Wort über die physikalische Bedeutung der Charakteristiken einschalten. Ihre fundamentale Eigenschaft ist, daß an ihnen Unstetigkeiten der abhängig Variablen selbst oder ihrer Ableitungen möglich sind; dementsprechend können an einer Charakteristik zwei Lösungen verschiedener analytischer Form zusammengefügt werden. Als sehr einfaches Beispiel betrachten wir einen Keil, auf dessen Seitelängs AB (Abb. 3) ein konstanter, der Größe nach nicht gegebener Druck einwirkt. Sei der Keilwinkel $2\beta_0 > \frac{\pi}{2}$ und eine orthogonale Plastizitätsbedingung angenommen. Man sieht, daß in ABC ein konstanter Spannungszustand herrscht, dementsprechend das geradlinige Gleitliniennetz, und ein anderer gleichfalls konstanter Zustand in BED . In BCD hat die Lösung die Form, die man als „einfache Welle“ (simple wave²⁰) bezeichnet, wobei die Gleitlinien einer Familie geradlinig sind. Hier bilden die Geraden ein Strahlenbüschel durch B , die anderen Kurven, die orthogonalen Trajektorien, sind hier konzentrische Kreise. Die Geraden BC und BD , die diese drei verschiedenen Lösungen separieren, sind Spannungscharakteristiken. Andererseits ist die Charakteristik $ACDE$, die das plastische vom elastischen (hier als starr angenommenen) Material scheidet, eine Geschwindigkeitscharakteristik. Natürlich ist auch in diesem einfachen Falle die genannte Grenze $ACDE$ nicht „gegeben“, sondern erst durch die Lösung bestimmt: AC ist geradlinig als Teil des gleichförmigen Netzes ABC und bildet den 45°-Winkel BAC mit AB , die eine Hauptrichtung ist; daran schließt der Kreisbogen DC und an diesen, wieder unter 45° zu der Hauptrichtung BE , die Gerade DE . Fügen wir noch, indem wir aus Zeitmangel auf weitere Beispiele verzichten, die allgemeine Bemerkung hinzu, daß eine feinere Überlegung lehrt, daß an einer Spannungscharakteristik die Spannungen selbst nicht springen können, sondern nur ihre Ableitungen. Hingegen darf sich an einer Geschwindigkeitscharakteristik die zu dieser Richtung tangentielle Geschwindigkeitskomponente beim Übergang sprunghaft ändern.

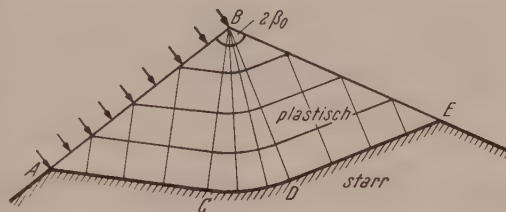


Abb. 3.

²⁰ Die „simple wave“ der Gasdynamik wird in der deutschen Literatur oft als Prandtl-Meyer-Lösung bezeichnet.

Kehren wir zu unseren Grundgleichungen zurück. Wir wollen die Geschwindigkeitsgleichungen (3) in einer Weise umformen, die die charakteristischen Richtungen zum Ausdruck bringt. Aus (3') folgt

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y}{\dot{\gamma}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} - \frac{\partial h}{\partial \sigma_y}}{2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau} \right)} = \cot 2 \vartheta.$$

(Wir erinnern uns, daß die Tensoren Σ und Grad h gleiche Hauptrichtungen haben.)
Ferner:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y}{\dot{\gamma}} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2}{\dot{\gamma}} = \frac{H_1 + H_2}{\frac{\partial h}{\partial \tau}}.$$

Nun ist für den durch (13') definierten Winkel: $\cos 2 \vartheta = \frac{H_1 + H_2}{H_2 - H_1}$. Ferner folgt, da $\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau} = (H_1 - H_2) \sin \vartheta \cos \vartheta$, daß

$$\frac{H_1 + H_2}{\frac{\partial h}{\partial \tau}} = \frac{\frac{H_1 + H_2}{H_2 - H_1} \cdot (H_2 - H_1)}{2 (H_1 - H_2) \sin \vartheta \cos \vartheta} = - \frac{\cos 2 \vartheta}{\sin 2 \vartheta}$$

und wir erhalten somit die Geschwindigkeitsgleichungen in der Form:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y}{\dot{\gamma}} = \cot 2 \vartheta, \quad \frac{\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y}{\dot{\gamma}} = - \frac{\cos 2 \vartheta}{\sin 2 \vartheta} \quad (16)$$

und eine dritte aus diesen folgende Gleichung:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x}{\dot{\varepsilon}_y} = \frac{\tan (\vartheta + \psi)}{\tan (\vartheta - \psi)}. \quad (16')$$

Diese bringt wieder das Verschwinden der Normaldehnung längs einer Charakteristik zum Ausdruck. Für $\psi = \frac{\pi}{4}$ reduzieren sich (16') sowie die zweite Gl. (16) auf $\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0$, während die erste Gl. (16) ungeändert bleibt.

Die Geschwindigkeitsgleichungen sind equivalent den Geschwindigkeits-Kompatibilitätsbedingungen. Wir wollen diese nun schließlich ausführlicher schreiben. Nehmen wir $f = h$ an, also $\varphi = \psi$, $\gamma = \delta$. Dann gilt nach (15)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{nn} &= (\dot{E})_{nn} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cos^2 \gamma + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \cos \gamma \sin \gamma + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin^2 \gamma = \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin \gamma \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin \gamma \right) \sin \gamma = \\ &= \frac{dv_x}{dl} \cos \gamma + \frac{dv_y}{dl} \sin \gamma = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Wenn also dl , bzw. dl' Linienelemente der Charakteristiken sind, so erhalten wir

$$\frac{dv_y}{dl} \frac{dv_x}{dl} = - \cot \gamma, \quad \frac{dv_y}{dl'} \frac{dv_x}{dl'} = - \cot \gamma' \quad (18)$$

oder, entlang einer C oder C' :

$$\frac{dv_y}{dv_x} = - \cot (\vartheta \pm \varphi). \quad (18')$$

Diese einfache Beziehung legt es nahe, eine „Geschwindigkeitsebene“ einzuführen, in der v_x, v_y rechtwinkelige Koordinaten sind. Für die Bilder \bar{C}, \bar{C}' von C, C' in dieser Ebene gilt dann

$$C \perp \bar{C}, \quad C' \perp \bar{C}' \quad (19)$$

und dies kann bei einer angenäherten Konstruktion zur Lösung des Geschwindigkeitsproblems mit Vorteil verwendet werden. Weiters folgt

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dl} &= \frac{d}{dl} (v_x \cos \gamma + v_y \sin \gamma) = \\ &= \left(\frac{dv_x}{dl} \cos \gamma + \frac{dv_y}{dl} \sin \gamma \right) + (-v_y \sin \gamma + v_x \cos \gamma) \frac{d\gamma}{dl} = v_\nu \frac{d\gamma}{dl}, \end{aligned}$$

wobei $\nu \perp n$. Also, wenn auch $\nu' \perp n'$, so gilt

$$dv_n - v_\nu d\gamma = 0, \quad \text{entlang } C, \quad dv_{n'} - v_{\nu'} d\gamma' = 0, \quad \text{entlang } C' \quad (20)$$

und, wenn wir die Krümmungsradien R, R' der C, C' einführen, erhält man:

$$\frac{dv_n}{dl} - \frac{v_\nu}{R} = 0, \quad \text{entlang } C, \quad \frac{dv_{n'}}{dl'} - \frac{v_{\nu'}}{R'} = 0, \quad \text{entlang } C'. \quad (20')$$

In diesen Gleichungen treten (zum Unterschied von den früheren) die Spannungen nicht mehr explizite auf. Im orthogonalen Spezialfall fällt n mit ν' und n' mit $-\nu$ zusammen und es folgen aus (20') die 1930 von mir angegebenen²¹ Grundgleichungen des Geschwindigkeitsproblems. Natürlich kann man in (20') die v_ν und $v_{\nu'}$ durch die v_n und $v_{n'}$ ausdrücken und erhält

$$\frac{dv_n}{d\gamma} = \frac{v_n \cos 2\varphi - v_{n'}}{\sin 2\varphi}, \quad \text{entlang } C, \quad \frac{dv_{n'}}{d\gamma'} = \frac{v_n - v_{n'} \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}, \quad \text{entlang } C'. \quad (20'')$$

Bemerken wir noch, daß in jeder der Gl. (20) nur eine Differentiation auftritt. Dies ist der formale Grund der oben erwähnten Tatsache, daß an einer Geschwindigkeitscharakteristik die Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsvektors springen darf.

Wir haben somit die Grundbeziehungen unserer Verallgemeinerung aufgestellt. Insbesondere haben wir die charakteristischen Richtungen bestimmt, sowie die Kompatibilitätsbedingungen; diese sind dem ursprünglichen System (3), (7) äquivalent und stellen eine besonders einfache und verwendbare Form der Gleichungen dar. Wir fanden insbesondere, daß im Falle $F = H$ in jedem hyperbolischen Punkt, d. h. in jedem Punkt, in dem F_1 und F_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben, zwei je doppelt zählende Charakteristikenrichtungen existieren, die das, im allgemeinen nicht orthogonale, Netz der C, C' bestimmen; dieses hängt gemäß dem nicht linearen Charakter des Problems von der speziellen Lösung ab, also von den Anfangs- oder Randbedingungen. Wenn $F \neq H$, so hängt der Charakter eines Punktes von den Zeichen der Produkte $F_1 F_2$ und $H_1 H_2$ ab; sind beide Zeichen negativ, so gibt es vier reelle verschiedene charakteristische Richtungen, paarweise symmetrisch zu der ersten Hauptrichtung von Σ . Im ganzen sind neun Kombinationen realisierbar, je nachdem $F_1 F_2 \gtrless 0, H_1 H_2 \gtrless 0$. Wiederholen wir auch, daß an einer Spannungscharakteristik die Spannungen sich nicht sprunghaft ändern können, sondern nur ihre Ableitungen, wohl aber kann an einer Geschwindigkeitscharakteristik die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit springen. — Die Spannungsgleichungen, die reduzibel sind, können in vielfacher Weise linearisiert werden, so daß man, je nach Wunsch, Systeme von zwei linearen Gleichungen erster Ordnung oder je eine Gleichung zweiter Ordnung benutzen kann. Wenn man insbesondere, analog zu dem beim speziellen Problem üblichen Vorgang, „charakteristische“ Spannungskoordinaten einführt, indem man

in (11') $\vartheta - G(s) = \beta$, $\vartheta + G(s) = \alpha$ setzt, so kann man in Analogie zu den im speziellen Fall üblichen Verfahren (s. z. B. Geiringer²¹, S. 32ff.) lineare Gleichungen in der α - β -Ebene gewinnen; diese haben allerdings hier keinen Vorzug vor anderen geeigneten Linearisierungen.

Es fehlt an Zeit weiterzugehen. Einige Andeutungen seien noch gestattet. Nehmen wir an, daß die eigentlichen Schwierigkeiten der Aufstellung eines Problems überwunden sind und wir ein oder mehrere einfache Anfangswertprobleme zu lösen haben, sagen wir ein Cauchy-Problem, wo entlang eines Kurvenstücks, K , in der x - y -Ebene s und ϑ so vorgegeben sind, daß K nirgends charakteristisch ist; außerdem sind v_y , v_x entlang K beliebig vorgegeben. Dann haben wir die Möglichkeit einer genauen oder angenäherten Lösung. Erstere können wir etwa mittels Partikularlösungen aufzubauen suchen, wobei wir gegebenenfalls bezüglich der Spannungen die linearisierten Gleichungen verwenden können; das Geschwindigkeitsproblem ist, sobald die Spannungen bekannt sind, ohnedies linear. Bei numerischer Lösung wird man sich mit Vorteil der durch geeignete Differenzengleichungen ersetzten Kompatibilitätsbedingungen bedienen. Auch geometrische Methoden, die einerseits die „Spannungsebene“ der s , ϑ (oder die charakteristische Ebene der α , β), andererseits die „Geschwindigkeitsebene“ der v_x , v_y und die Bilder der Charakteristiken in diesen Ebenen benutzen, können angegeben werden.

Unter den Partikularlösungen, die man, wenn möglich, ihrer Einfachheit halber zu benutzen suchen wird, stehen die oben genannten „einfachen Wellen“ in erster Reihe. Eine solche Spannungsverteilung ist das Bild einer einzigen Spannungscharakteristik, z. B. einer Γ^- , $\alpha = \text{konst.}$, d. h. es ist für alle Punkte einer solchen Lösung $\vartheta + G(s) = \text{konst.}$ Davon ausgehend, läßt sich die Spannungsverteilung — die längs jeder geradlinigen Charakteristik unverändert bleibt — explizite angeben, wenn, außer den nötigen Anfangswerten, die einparametrische Geradenschaar bekannt ist, die die Rolle der geraden C^+ spielt; auch die Geschwindigkeitsverteilung ist explizite bestimmbar.

Sprechen wir zum Schluß von einigen Schwierigkeiten, denen auch die spezielle, auf den Beziehungen (a), (b) aufgebaute Theorie des „plane strain“ gegenübersteht. Die Schwierigkeit in der Behandlung konkreter Probleme liegt zunächst in der Aufstellung aller dem Problem entsprechenden Randbedingungen — im weitesten Sinn —, die sich im allgemeinen auf Spannungen sowie auf Geschwindigkeiten beziehen und wobei die Grenzen zwischen dem als plastisch anzusehenden und dem elastischen (oder starren) Material — längs derer gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen — zunächst nicht bekannt sind. Hat man dann schließlich alle Bedingungen festgestellt, so wird man oft einer mehr oder minder neuen, mathematisch noch nicht systematisierten Situation gegenüberstehen, anders als in wichtigen Teilen der Elastizitätstheorie oder Hydromechanik, wo gewisse grundlegende Fragestellungen auf bereits studierte typische mathematische Probleme führen, für die die fundamentalen Existenz- und Eindeutigkeitsfragen beantwortet sind. Es ist auch hier anzunehmen, daß sich aus dem sorgfältigen Studium von kompletten Einzelproblemen, wie es besonders in den letzten Jahren mit so viel Erfolg unternommen wurde (s. Literatur in ¹⁵ und ¹⁹), allmählich allgemeine mathematisch definierte Problemtypen ergeben werden und daß die angewandte Mathematik die sich so ergebenden Fragestellungen beachten wird und einerseits soweit möglich Antworten geben, andererseits aus neuen Fragen neue Anregungen gewinnen wird.

²¹ H. Geiringer: Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. Mem. Sci. Math. 86. Paris: Gauthier Villars. 1937.

Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I.

Von W. Wunderlich, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. In diesem ersten Teil werden zeichnerische und rechnerische Verfahren zur Ermittlung von Fräserprofilen für die Erzeugung von Schraubnuten einer gewünschten Form auseinandergesetzt. Als Anwendungsbeispiel wird ein im Prinzip zur Herstellung von Flachgewindeflanken geeigneter Scheibenfräser entwickelt.

Summary. In this first part the author explains graphical and numerical methods concerning the construction of the profiles of form cutters fit for milling of helical grooves of a fixed form. The methods are then illustrated by the example of a side-milling cutter, appropriate for shaping the sides of a flat thread.

Résumé. Dans cette première partie l'auteur explique des méthodes graphiques et numériques, concernant la construction de fraises pour l'usinage de rainures hélicoïdales d'une forme prescrite. Ces méthodes sont appliquées à l'étude d'une fraise en disque, propre à l'usinage de vis à filet carré.

Bei der Herstellung einer Schraubnut — fälschlich oft als „Spiralnute“ bezeichnet — mittels eines Scheiben- oder Fingerfräasers liegt in jedem Augenblick folgende geometrische Situation vor: Die die Nut repräsentierende Schraubfläche Φ und jene Drehfläche Ψ , die von den Schneidkanten des rotierenden Fräasers überstrichen wird, berühren einander längs einer gewissen Linie q , die die Grenze der bis zu diesem Zeitpunkt erzeugten Nutenfläche angibt. Diese im allgemeinen krumme Linie q , Eingriffslinie oder Charakteristik genannt, spielt für alle theoretischen Untersuchungen dieses Fragenkreises eine entscheidende Rolle.

Die wichtige Aufgabe der Werkzeugtechnik, die zur Herstellung einer Schraubnut von bestimmter, vorgeschriebener Gestalt geeigneten Fräserformen zu ermitteln, ist demnach ein vorwiegend geometrisches Problem: Es handelt sich darum, zu einer gegebenen Schraubfläche Φ eine längs einer Linie berührende Drehfläche Ψ zu finden, deren Achse vorher passend anzunehmen ist.

Diese häufig auftretende Aufgabe ist nicht ganz einfach und bereitet daher dem Praktiker manche Schwierigkeiten, wiewohl die dabei obwaltenden geometrischen Verhältnisse wiederholt gekennzeichnet worden sind; erstmalig anscheinend durch E. Stübler^{1, 2}, im Anschluß daran in dem bekannten Lehrbuch der darstellenden Geometrie von Th. Schmid³ und später neuerlich durch O. Baier⁴. Öfters festgestellte Unklarheiten bewogen nun den Verfasser, dieses Problem hiermit nochmals zu behandeln und in einer der Denkweise und dem Anschauungsbedürfnis des Ingenieurs entgegenkommenden, ausführlichen und elementaren Weise darzulegen. Zunächst werden in voller Allgemeinheit die für alle Vorarbeiten notwendigen zeichnerischen Verfahren auseinandergesetzt, die eine interessante Anwendung der darstellenden Geometrie bieten. Anschließend wird eine rechnerische Methode entwickelt, die zur Steigerung der Genauigkeit eingesetzt werden kann, sobald einmal über die Lage der Fräserachse endgültig entschieden ist. Als Anwendungsbeispiel wird schließlich ein zur Herstellung von flachgängigen Gewindenuten prinzipiell geeigneter Scheibenfräser konstruiert und durchgerechnet. Eine kurze Kennzeichnung

¹ E. Stübler: Das Fräsen von Schraubengewinden. Z. Math. Phys. 57, 271—279 (1909).

² E. Stübler: Geometrische Probleme bei der Verwendung von Schraubenflächen in der Technik. Z. Math. Phys. 60, 244—274 (1912).

³ Th. Schmid: Darstellende Geometrie, II. Bd., S. 281ff. (Sammlung Schubert 66. Berlin und Leipzig. 1921.)

⁴ O. Baier: Konstruktion eines Fräasers, der eine gegebene Schraubenfläche erzeugt. Z. angew. Math. Mechan. 14, 248—250 (1934).

der bei spezieller Fräserlage eintretenden Besonderheiten beschließt diesen I. Teil. — In einem später folgenden II. Teil soll dann die umgekehrte Aufgabe erörtert werden, die Ermittlung der von einem vorliegenden Fräser erzeugbaren Schraubnuten betreffend.

1. Zeichnerische Verfahren.

Die die Schraubnut darstellende Schraubfläche Φ sei durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt: Durch die Schraubachse a , die Ganghöhe H oder besser

den Schraubparameter $p = H/2\pi$, und schließlich durch eine beliebige, auf der Fläche verlaufende „Erzeugende“ e . Von der Fräserfläche Ψ sei die Achse b gegeben; schneidet dieselbe die Schraubachse a unter rechtem Winkel, so handelt es sich um einen sogenannten „Fingerfräser“, sonst — also vor allem bei windschiefer Lage — im allgemeinen um einen „Scheibenfräser“.

Um die zur Achse b gehörige, die Schraubfläche Φ längs einer Linie berührende Drehfläche Ψ zu konstruieren, sind im wesentlichen zwei Methoden anwendbar. In beiden Fällen wird die Aufstellung am besten so vorgenommen, daß die Schraubachse a zur Grundrißebene normal und die Fräserachse b zur Aufrißebene parallel ist.

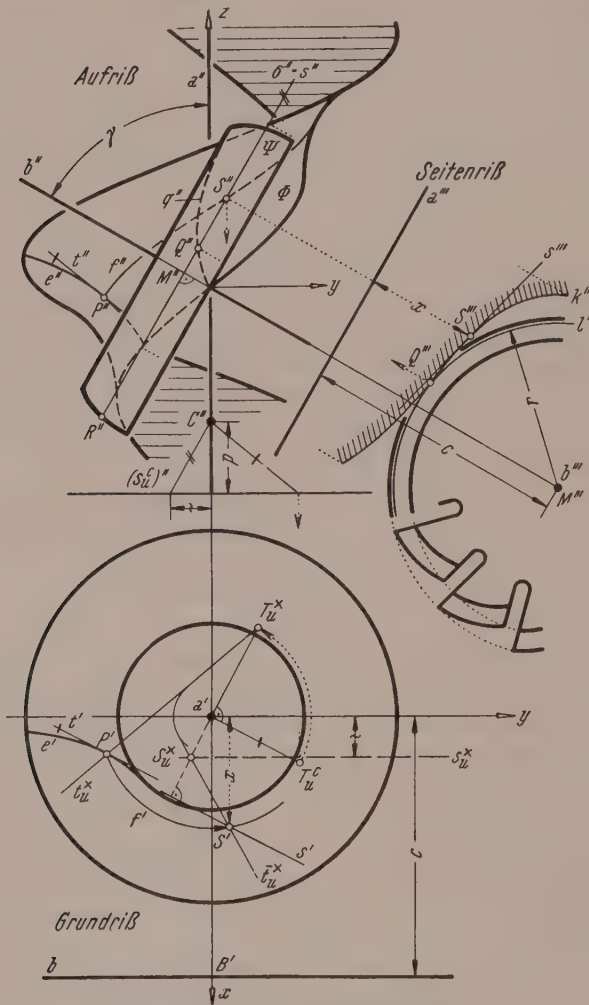


Abb. 1. Parallelkreisverfahren.

zeichnet, dann kann dort auch der Parallelkreis l um den bekannten Mittelpunkt $M = \sigma b$ berührend an k eingetragen werden. Der Berührungspunkt Q wird dabei zwar mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sein, die sich jedoch nicht auf den Parallelkreisradius r und den zugehörigen Hauptmeridianpunkt R des Fräasers auswirkt. — Es ist als besonderer Vorteil des Parallelkreisverfahrens zu werten, daß allfällige „Unterschnitte“ unmittelbar in dem verwendeten Seitenriß sichtbar werden, indem dann der Fräserkreis l den Kurvenbogen k an irgend einer Stelle durchsetzt. Einem solchen, unbedingt zu vermeidenden Vorkommnis muß durch Verlegung der Fräserachse begegnet werden.

A. Parallelkreisverfahren (Abb. 1). Man lege eine Serie von ebenen Schnitten normal zur Fräserachse b . Jede solche Ebene $\sigma \perp b$ wird die Schraubfläche Φ nach einer) (im allgemeinen transzendenten Kurve k und die Drehfläche Ψ nach einem Parallelkreis l schneiden, die einander in einem Punkt Q der Eingriffslinie q berühren müssen. Hat man also die Schnittlinie $k = \sigma \Phi$ sorgfältig in einem Seitenriß parallel zu σ ge-

Einige Worte mögen noch der Konstruktion der Schnittkurve $k = \sigma \Phi$ gewidmet werden. Man erhält zunächst Punkte von k , indem man die Ebene σ entweder mit den Schraublinien f schneidet, die von einzelnen Punkten P der Erzeugenden e ausgehen, oder aber mit einzelnen Schraublagen \bar{e} von e , falls die Erzeugende besonders einfach (insbesondere gerade) ist; beides ist wegen der aufrißprojizierenden Lage von σ leicht durchzuführen. Anschließend empfiehlt es sich, stets noch in jedem konstruierten Punkt S von k die Tangente s zu ermitteln, indem man σ mit der Tangentialebene von Φ (in S) zum Schnitt bringt; hierbei leistet das elegante „Drehfluchtprinzip“ von Th. Schmid³ gute Dienste⁵. So wurde in Abb. 1 zunächst im Ausgangspunkt P die von der Erzeugendentangente t und der Schraubtangente aufgespannte Tangentialebene τ von Φ durch ihre Drehfluchtspur $t_u \times = T_u \times P'$ festgelegt und diese hierauf, der Schraubung $P \rightarrow S$ entsprechend, der Drehung $P' \rightarrow S'$ unterworfen; die so gewonnene Neulage $t_u \times$ schneidet dann aus der (allen Parallelschnitten gemeinsamen) Drehfluchtspur $s_u \times$ der Ebene σ den Drehfluchtpunkt $S_u \times$ der Schnitttangente s aus. Aus deren Grundriß $s' \perp a' S_u \times$ und Aufriß $s'' = \sigma''$ ist dann der benötigte Seitenriß s''' ohne weiteres zu bekommen.

Auch die Meridiantangente der Fräserfläche Ψ in dem durch Drehung um b aus Q hervorgehenden Umrißpunkt R ließe sich unschwer angeben: Man hätte bloß die Tangentialebene von Φ im Berührungspunkt Q zu bestimmen und mit der Fräserachse b zu schneiden; der so gewonnene Punkt T stellt die Spitze des der Drehfläche längs des Parallelkreises l umschriebenen Berührungskegels dar und ist nur noch mit R zu verbinden. Es muß allerdings betont werden, daß die oben erwähnte Unsicherheit des Eingriffspunktes Q sich in gleicher Größenordnung auf die zugehörige Tangentialebene und damit auch auf die Meridiantangente RT fortpflanzen kann.

B. Normalenverfahren (Abb. 2). Die Grundidee beruht auf der Tatsache, daß die beiden Flächen Φ und Ψ in jedem Punkt ihrer Berührungslinie q eine gemeinsame Normale haben: Ein Eingriffspunkt ist also dadurch gekennzeichnet, daß die zugehörige Schraubflächennormale die Drehflächenachse b trifft. Zur konstruktiven Auswertung geht man von einem beliebigen Punkt P der die Schraubfläche Φ festlegenden Erzeugenden e aus, bestimmt daselbst die Flächennormale n und verschraubt diese hierauf so lange, bis sie die Fräserachse b trifft, wobei der Ausgangspunkt P in einen Eingriffspunkt Q übergeht. Der Treffpunkt N der Neulage \bar{n} von n mit b kann als Durchstoßpunkt von b mit der von n bei der Schraubung überstrichenen Strahlschraubfläche (Regelschraubfläche) Σ gefunden werden.

⁵ Hierbei wird der im Abstand p über der Grundrißebene befindliche Punkt C der Schraubachse als Augpunkt einer zusätzlichen Zentralprojektion auf die Grundrißebene eingeführt. Man erhält dann den „Drehfluchtpunkt“ $G_u \times$ einer Geraden g , wenn man deren Fluchtpunkt G_u^c im Sinne der Aufwärtsschraubung einer Viertelschwenkung um die Achse unterwirft; G_u^c , der Zentralriß des unendlich fernen Punktes G_u von g , ist dabei der Spurpunkt der durch C gehenden Parallele zu g . Analog entsteht die „Drehfluchtspur“ $e_u \times$ einer Ebene ε durch Viertelschwenkung aus ihrer Fluchtspur e_u^c , das ist die Spur der durch C gehenden Parallelebene zu ε .

Die Einführung dieser Begriffe erweist sich vor allem deshalb als vorteilhaft, weil der oft benötigte Drehfluchtpunkt einer Schraubtangente stets mit dem Grundriß ihres Berührungspunktes zusammenfällt, also nicht eigens konstruiert zu werden braucht. Wichtig sind ferner folgende, unmittelbar einzusehende Eigenschaften: a) Der Grundriß einer Geraden ist senkrecht zum Radiusvektor ihres Drehfluchtpunktes. b) Die Normalen einer Ebene erscheinen im Grundriß parallel zu deren Drehfluchtspur. c) Die Drehfluchten einer Ebene und ihrer Normalen liegen antipolar bezüglich des „Distanzkreises“ der Zentralprojektion (Mitte a' , Radius p). d) Die Drehfluchtspur einer von zwei Geraden aufgespannten Ebene verbindet die Drehfluchtpunkte der Geraden. e) Der Drehfluchtpunkt der Schnittgeraden zweier Ebenen liegt im Schnitt der beiden Drehfluchtspuren. f) Bei der Verschraubung von Geraden und Ebenen machen die Drehfluchten die Drehung um die Achse mit.

Die zeichnerische Durchführung dieses Planes erfordert nun eine Reihe von Einzelschritten. Zunächst wird wie unter A die von der Erzeugendentangente t und der Schraubtangente aufgespannte Tangentialebene τ in P durch ihre Drehfluchtspur $t_u^\times = T_u^\times P'$ festgelegt. Hierauf wird die Flächennormale $n \perp \tau$ dargestellt, deren Drehfluchtpunkt N_u^\times zufolge Fußnote 5c mit dem Antipol von t_u^\times bezüglich

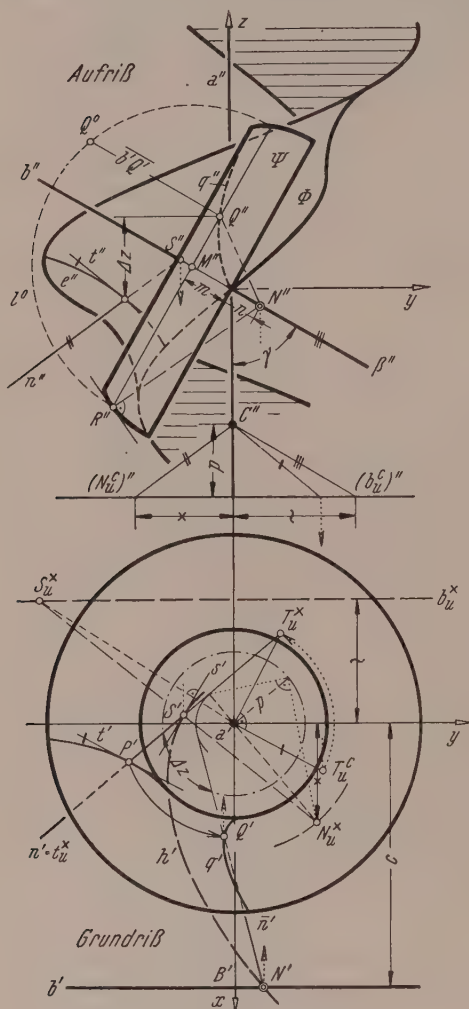


Abb. 2. Normalenverfahren.

kurve h schneidet nun aus der Fräserachse b den gewünschten Durchstoßpunkt $N = b \cap \Sigma$ aus⁶. Die durch N gehende Schraublage \bar{n} von n kann nun im Grundriß mittels des von n' eingehüllten Hilfskreises (um a') sofort gezeichnet werden, ebenso der aus P hervorgehende Eingriffspunkt Q . Bezeichnet $\Delta\varphi$ den nunmehr bekannten Drehwinkel der Schraubung $n \rightarrow \bar{n}$ ($P \rightarrow Q$), so gibt $\Delta z = p \cdot \Delta\varphi$ den für den Aufriß benötigten Höhenunterschied von P und Q an, und dieser kann demnach als Bogen des „Parameterkreises“ zwischen n' und \bar{n}' abgenommen (mit dem Stechzirkel abgelaufen) werden. — Mit dem Eingriffspunkt Q ist jetzt auch der durch Rotation von Q um b entstehende Parallelkreis l

⁶ Tritt kein reeller Schnittpunkt auf, so ist die angenommene Fräserachse unbrauchbar. Liegen mehrere Schnittpunkte vor, so bereitet die Wahl des in Betracht kommenden im allgemeinen keine Schwierigkeiten, doch besteht begründeter Verdacht auf Unterschneidungen.

des „Parameterkreises“ (Mitte a' , Radius p) zusammenfällt: Geleitet von der Vorstellung des durch negative Viertelschwenkung aus N_u^\times rekonstruierbaren Fluchtpunktes N_u^c , dessen Verbindung mit dem Augpunkt C die Richtung der gesuchten Normale n anzeigt, erkennt man, daß deren Grundriß n' sich mit t_u^\times deckt und daß zur Bestimmung des Aufrißes $n'' \parallel C''(N_u^c)''$ nur die Übertragung des (in Abb. 2 angekreuzten) x -Abstandes von N_u^\times auf die negative y -Achse nötig ist. — Zur Ermittlung des Durchstoßpunktes N der Fräserachse b mit der durch Verschraubung der Normale n erzeugten Strahlschraubfläche Σ kann man deren Schnittkurve h mit einer passenden, durch b gelegten Hilfsebene β konstruieren; in erster Linie eignet sich hierzu die zur Aufrißtafel normale Ebene, weil diese im Aufriß projizierend erscheint ($\beta'' = b''$). Man erhält einen ersten Punkt S der Hilfskurve h im Durchstoßpunkt von n mit β . Die zugehörige Tangente s von h wird aus β durch die Tangentialebene von Σ ausgeschnitten, die von der Erzeugenden n und der Schraubtangente des Punktes S aufgespannt wird; der die zum Grundriß s' normale Richtung anzeigende Drehfluchtpunkt S_u^\times wird demnach im Schnitt der Drehfluchtspuren b_u^\times und $N_u^\times S'$ von β und der genannten Tangentialebene gefunden. Nach diesem Muster können beliebig viele weitere Punkte und Tangenten von h bestimmt werden, wenn n durch einzelne Schraublagen ersetzt wird; b_u^\times bleibt dabei fest, während N_u^\times die Drehung um a mitmacht.

— Die mit aller Sorgfalt zu zeichnende Hilfs-

der Fräserfläche Ψ bekannt, dessen Mittelpunkt M und Umklappung l^0 im Aufriß sofort angegeben werden können. Da in N die Spitze des längs l errichtbaren Normalenkegels von Ψ zur Verfügung steht, können auch Meridiannormale und -tangente — etwa im Hauptmeridianpunkt R — unmittelbar eingetragen werden, und zwar diesmal ohne die beim Parallelkreisverfahren festgestellte Unsicherheit.

C. Varianten des Normalenverfahrens. O. Baier⁴ hält die im Ausgangspunkt P errichtete Schraubflächennormale n fest und verschraubt dafür die Fräserachse b in eine Lage \bar{b} zurück, die n trifft. Die Schraubung $b \rightarrow \bar{b}$ bringt dann n in die \bar{b} treffende Lage \bar{n} und macht aus P den Eingriffspunkt Q . Der ausschlaggebende Treffpunkt \underline{N} von n und \bar{b} wird als Durchstoßpunkt von n mit der durch \bar{b} überstrichenen Strahlschraubfläche Θ gewonnen. Es ist eine bestechende Eigenheit dieser Variante, daß es sich hier bei der notwendigen Wiederholung des Verfahrens stets um dieselbe Fläche Θ handelt, die lediglich mit verschiedenen Normalen n zu schneiden ist. Es würde sich daher lohnen, zwecks Einsatzes des Prinzips der „kotierte Projektion“ den durch ein äquidistantes System von Horizontalebenebenen erzeugten Schichtenplan der Schraubfläche Θ zu entwickeln, da dann der Schnittpunkt mit der jeweiligen, entsprechend graduerten Geraden n leicht zu bestimmen ist. Die Tatsache, daß die Schichtenlinien von Θ durch Schraubung auseinander hervorgehen, also untereinander kongruent sind, gestattet jedoch noch eine originelle Vereinfachung: O. Baier zeichnet auf ein mit der Zirkelspitze in a' festgehaltenes durchsichtiges Pauspapier eine einzige der Schichtenlinien i (übrigens eine allgemeine Kreisevolvente), sowie eine gleichmäßige Kreisskala mittels des zur Schichtenhöhe d gehörigen Schraubwinkels $\delta = d/p$, so daß die zu einer verdrehten Lage gehörige Schichtenkennziffer unmittelbar über einer auf der festen Unterlage angebrachten Ablesemarke aufscheint. Die Verdrehung ist nun so weit zu treiben, bis die von i auf der Graduierungsskala des Normalengrundrisses n' ausgeschnittene Schichtenzahl mit dem über der Ablesemarke befindlichen Kreisskalenwert übereinstimmt, was durch kurzes Probieren zu erreichen ist: Im Schnittpunkt $i n'$ ist dann der Grundriß des benötigten Treffpunktes $\underline{N} = \Theta n$ gefunden. Die Genauigkeit ist bei einem solchen mit einem Interpolationsprozeß verbundenen „geometrischen Experiment“ wohl etwas unsicher.

E. Stübler¹ befaßt sich wiederum vorwiegend mit dem ziemlich häufigen Spezialfall geradliniger Erzeugenden ($\Phi =$ Strahlschraubfläche) und betrachtet dabei jeweils die Gesamtheit der Flächennormalen n längs einer solchen Erzeugenden e . Um unter diesen Normalen, die bekanntlich ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid Π erfüllen, jene zu finden, die die Fräserachse b treffen, sind die beiden Durchstoßpunkte N von b mit Π aufzusuchen. Es handelt sich hierbei um eine quadratische Aufgabe, die zwar grundsätzlich mit Lineal und Zirkel zu bewältigen ist, aber doch allerhand Umstände bedingt. Zur Vereinfachung kann übrigens jedes der untereinander kongruenten Paraboloiden Π in das zu einer Ausgangslage e_0 gehörige Paraboloid Π_0 zurückverschraubt werden, wobei die Gerade b mitzunehmen ist.

2. Rechnerische Behandlung.

Sobald die Aufgabe der Ermittlung eines bestimmten Schraubnutenfräasers auf graphischem Wege befriedigend erledigt ist, wird zur Kontrolle und Steigerung der Genauigkeit noch eine rechnerische Nachprüfung erwünscht sein. Die nachstehend entwickelte numerische Behandlung des Fräserproblems macht die vorhin dargestellten darstellend-geometrischen Methoden keineswegs etwa überflüssig, sondern wird sich wesentlich auf deren Ergebnisse stützen müssen; erst nachdem in zeichnerischer Vorarbeit die Achsenlage des Fräasers zufriedenstellend geklärt wurde, kann die Rechnung erfolgreich einsetzen.

Eine numerische Näherungsmethode, die sich auf das „Parallelkreisverfahren“ stützt, setzte kürzlich J. Heisig⁷ auseinander, während dem von E. Stübler² mitgeteilten Rechenschema, ebenso wie dem folgenden, das „Normalenverfahren“ zugrunde liegt.

Die nachstehende analytische Behandlung bedient sich eines kartesischen Normalkoordinatensystems x, y, z , dessen z -Achse mit der Schraubachse a zusammenfällt, während die x -Achse den kürzesten Abstand OB von a und der Fräserachse b tragen soll (vgl. Abb. 1 und 2). Das Koordinatentripel eines Punktes wird gelegentlich zu einem Ortsvektor $\mathfrak{x}(x, y, z)$ zusammengefaßt. Bezeichnet $c = OB$ den Abstand und γ den Winkel des Achsenpaares a, b , dann wird b beschrieben durch

$$x = c, \quad y \cos \gamma + z \sin \gamma = 0. \quad (1)$$

Die Erzeugende e der Schraubfläche Φ sei in ihrer Ausgangslage mit Hilfe eines Kurvenparameters v dargestellt durch

$$\mathfrak{x} = \begin{cases} X(v), \\ Y(v), \\ Z(v). \end{cases} \quad (2)$$

Bezeichnet weiterhin u den Schraubwinkel — zu dem bekanntlich die Schieb-
strecke $\Delta z = p u$ gehört —, so lautet die Gleichung der entsprechenden Schraub-
lage \bar{e} von e :

$$\bar{\mathfrak{x}} = \begin{cases} X(v) \cos u - Y(v) \sin u, \\ X(v) \sin u + Y(v) \cos u, \\ Z(v) + p u. \end{cases} \quad (3)$$

Damit liegt gleichzeitig die Parameterdarstellung der Nutenfläche Φ vor. Das krummlinige Koordinatennetz auf Φ besteht aus den Erzeugendenlagen $u = \text{konst.}$ und den Schraublinien $v = \text{konst.}$

Die Tangentialebene in einem Punkt $P(u = 0, v)$ von e wird aufgespannt vom Tangentenvektor $\mathfrak{x}' = d\mathfrak{x}/dv$ der Erzeugenden e und dem Schraubtangentenvektor

$$\dot{\mathfrak{x}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u} \Big|_{u=0} = \begin{cases} -Y(v), \\ X(v), \\ p. \end{cases} \quad (4)$$

Der Normalenvektor $\mathfrak{n} = \mathfrak{x}' \times \dot{\mathfrak{x}}$ hat demnach die Komponenten

$$\xi = XZ' - pY', \quad \eta = YZ' + pX', \quad \zeta = -(XX' + YY'). \quad (5)$$

Er erfährt bei der Schraubung nur eine Verdrehung um die z -Achse, so daß sich die Komponenten des Normalenvektors $\bar{\mathfrak{n}}$ des Flächenpunktes $Q(u, v)$ hinschreiben lassen mit

$$\bar{\xi} = \xi \cos u - \eta \sin u, \quad \bar{\eta} = \xi \sin u + \eta \cos u, \quad \bar{\zeta} = \zeta. \quad (6)$$

Q ist ein Eingriffspunkt, wenn seine Normale die Fräserachse b in einem Punkt N trifft. Diese Bedingung ist unter Benützung des Achsenpunktes $B(c, 0, 0)$ gleichbedeutend mit der Forderung, daß die drei Vektoren BQ , \mathfrak{n} und $\mathfrak{b}(0, -\sin \gamma, \cos \gamma)$ komplanar sind. Dies findet wiederum seinen Ausdruck im Verschwinden der Determinante

⁷ J. Heisig: Die Profilermittlung des Formfräasers für das Fräsen von Spiralnuten. Diss. T. H. Wien, 1951.

$$\begin{vmatrix} \bar{X} - c & \bar{\xi} & 0 \\ \bar{Y} & \bar{\eta} & -\sin \gamma \\ \bar{Z} & \bar{\zeta} & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Diese Beziehung stellt sozusagen die „Schlüsselgleichung“ des Fräserproblems dar. Wird die Determinante nach der letzten Spalte entwickelt, wobei die Größen $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ vermöge (3) und $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ vermöge (6) auf u und v zurückgeführt werden, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & [(X \zeta - Z \xi) \cos u - (Y \zeta - Z \eta) \sin u - p u (\xi \cos u + \eta \sin u) - c \zeta] \sin \gamma + \\ & + \underbrace{[(X \eta - Y \xi) - c (\xi \sin u + \eta \cos u)]}_{-p \zeta} \cos \gamma = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Bedingung $F(u, v) = 0$ kann direkt als die Gleichung der Eingriffslinie in den Flächenkoordinaten u und v angesehen werden.

Zur Auswertung wird man im allgemeinen eine Reihe von v -Werten annehmen und die transzendente Gl. (8) jeweils nach u auflösen, zu welchem Zwecke sie etwa auf die Gestalt

$$u = \frac{A \sin u + B \cos u + C}{p (\eta \sin u - \xi \cos u)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} A &= c \xi \operatorname{ctg} \gamma + (Y \zeta - Z \eta), \\ B &= c \eta \operatorname{ctg} \gamma - (X \zeta - Z \xi), \\ C &= (p \operatorname{ctg} \gamma + c) \zeta \end{aligned} \quad (9)$$

gebracht werden mag, die unter Umständen die Anwendung eines einfachen Iterationsverfahrens erlaubt (Einsetzung eines Näherungswertes von u in der rechten Seite, um einen verbesserten Näherungswert zu gewinnen). Mittels des gefundenen u -Wertes liefert dann das Gleichungssystem (3) die Koordinaten $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ des entsprechenden Eingriffspunktes Q . Mit dessen Kenntnis ist auch der zugehörige Parallelkreismittelpunkt M bekannt, dessen Achsenkoordinate $BM = m$ zufolge Abb. 2 mit

$$m = \bar{Y} \sin \gamma - \bar{Z} \cos \gamma \quad (10)$$

angegeben werden kann. Für den Parallelkreisradius r gilt wiederum

$$r^2 = (\bar{X} - c)^2 + q^2 \quad \text{mit} \quad q = \bar{Y} \cos \gamma + \bar{Z} \sin \gamma. \quad (11)$$

Zur Festlegung der Meridiantangente genügt die Angabe des Achsenpunktes N der Flächennormale QN . Seine Achsenkoordinate $BN = n$ berechnet sich am einfachsten aus dem verschwindenden Skalarprodukt des Vektors $NQ = (\bar{X} - c, \bar{Y} - n \sin \gamma, \bar{Z} + n \cos \gamma)$ und des dazu normalen mit Q verbundenen Schraubtangentevektors $(-\bar{Y}, \bar{X}, p)$ zu

$$n = (c \bar{Y} + p \bar{Z}) : (\bar{X} \sin \gamma - p \cos \gamma). \quad (12)$$

Es mag noch erwähnt werden, daß in dem Spezialfall einer geradlinigen Erzeugenden die Koordinaten X, Y, Z und damit auch ξ, η, ζ linear in v sind (wenn v ein Längenparameter der Erzeugenden ist), so daß die in u transzendente Schlüsselgleichung (8) in v quadratisch ist: In einem solchen Fall könnten demnach, im Gegensatz zu dem vorhin eingeschlagenen Weg, passende u -Werte angenommen und die zugehörigen v -Werte durch Auflösung jeweils einer quadratischen Gleichung bestimmt werden, wie es E. Stübler² auch vorschlägt (vgl. Abschn. 1, C). Diese v -Werte können aber leicht aus dem durch die Angabe vorgeschriebenen v -Intervall herausfallen, so daß der ursprüngliche Vorgang — Vorgabe von v -Werten und Auflösung nach u — meist auch hier der empfehlenswertere ist.

Von Interesse ist endlich noch folgende Feststellung: Die Schlüsselgleichung (9) bleibt unverändert, wenn c durch $c^* = p \operatorname{ctg} \gamma$ und gleichzeitig γ durch $\gamma^* = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} c/p$ ersetzt wird. Das bedeutet geometrisch, daß neben b — wenigstens theoretisch — noch eine zweite Fräserachse b^* existiert, die auf dieselbe Eingriffslinie führt⁸.

3. Anwendungsbeispiel: Scheibenfräser für Flachgewindeflanken.

Ein Drehzylinder vom Radius r_2 soll längs einer Wendelflächenrampe mit der mittleren Steigung $\operatorname{tg} \mu$ auf einen Kernradius r_1 abgefräst werden (vgl. Abb. 3). Es ist eine verbreitete Meinung, daß scharfe Hohlkanten, wie sie hier und bei Flach-

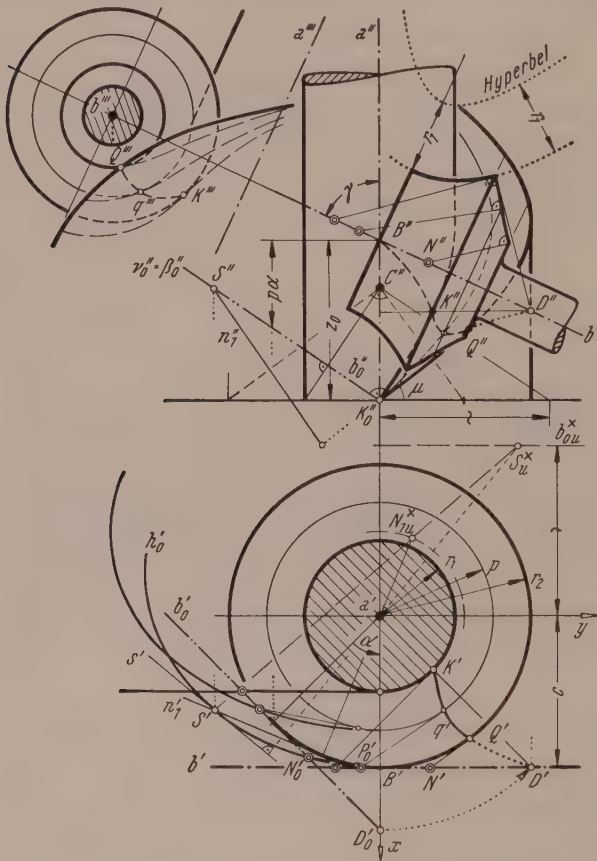


Abb. 3. Scheibenfräser für Flachgewindeflanken.

gewinden auftreten, prinzipiell nicht exakt ausgefräst werden können. Diese Ansicht ist jedoch nicht stichhältig und vielleicht nur durch die stark eingeschränkte Wahlfreiheit für die Fräserachse hervorgerufen. In jedem Punkt K der eine Hohlkante abgebenden Schraublinie f existieren nämlich, den dort zusammentreffenden Schraubflächenmänteln entsprechend, zwei Flächennormalen, die natürlich in der Normalebene ν von f liegen; da beide Normalen die Fräserachse b gleichzeitig treffen sollen, darf diese nicht mehr ganz frei, sondern nur in einer solchen Normalebene ν gewählt werden⁹. Andernfalls würden die beiden Äste der Eingriffslinie nicht zusammentreffen, und der zwischen ihnen liegende Kreisbogen der Fräserkante, längs der die beiden Mäntel der Fräserfläche zusammenstoßen, würde eine Ausrundung der Hohlkante bewirken. (Daß eine solche Ausrundung aus anderen Gründen oft geradezu erwünscht ist, steht hier nicht zur Diskussion.)

Für die der Rechnung vorausgehende zeichnerische Behandlung der gestellten Aufgabe (Abb. 3) mag zunächst etwa der vorderste Punkt K_0 der Hohlkante f ins Auge gefaßt werden. Seine Normalebene ν_0 wird dann gleich als Bezugsebene β_0 verwendet und gemäß 1, B mit einer Anzahl der von den Nutennormalen n überstrichenen Strahlschraubflächen Σ geschnitten. Die Fräserach-

⁸ Für den Kenner der Elemente der räumlichen Kinematik liegt in dieser Feststellung nichts Überraschendes: Sämtliche Bahnnormalen der Schraubung — es gibt deren nur ∞^3 — erfüllen einen linearen Strahlkomplex und alle ∞^2 Bahnnormalen, welche eine vorgelegte Gerade g treffen, treffen dann auch deren Polargerade g^* . Auch die Achsen b und b^* sind nichts anderes als „reziproke Polaren“ bezüglich des Normalenkomplexes.

⁹ Die Wahl der Fräserachse ist damit auf die Tangentenmannigfaltigkeit der von den Normalen der Schraublinie f eingehüllten Schraubtorse eingeschränkt.

se b_0 ist dann so anzunehmen, daß sie sämtliche gezeichneten Schnittlinien $h_0 = \Sigma \beta_0$ (und auch die dazwischenliegenden) trifft. — Ist einmal in geeigneter Weise über die Achse b_0 verfügt, dann wird diese für das folgende zweckmäßig in die aufrißparallele Lage b verschraubt; der zugehörige Schraubwinkel sei mit α bezeichnet. Die Fräserachse b liegt jetzt in der Bahnnormalebene jenes Hohlkantenpunktes K , der hierbei aus K_0 hervorgeht, und stellt eine 2. Hauptlinie derselben dar; b erscheint demnach im Aufriß normal zur Schraubtangente von K . — Im Rahmen des vorteilhaft einzusetzenden Normalenverfahrens wird natürlich das vorhandene Hilfskurvensystem h_0 ausgenützt: Ist N_0 ein Schnittpunkt von b_0 mit einer der Linien h_0 , und P_0 der leicht angebbare Fußpunkt der durch N_0 gehenden Nutennormale, dann geht der entsprechende Eingriffspunkt Q aus P_0 durch Schraubung um den Winkel α hervor.

An den die Wendelflächenrampe erzeugenden Fräserteil, der, wie aus dem in Abb. 3 hinzugefügten Seitenriß klar zu ersehen ist, zu keinerlei Unterschneidungen Anlaß gibt, schließt sich dann ein den Zylinderschaft formender Teil, der etwas einfacher zu konstruieren ist. Die Eingriffslinie besteht auch hier aus allen Punkten des Zylinders, deren Flächennormalen die Fräserachse b treffen. Zu deren Ermittlung können etwa Hilfsebenen normal zur Schraubachse a benutzt werden; die Punkte, in denen eine solche Ebene die Achsen a und b schneidet, liefern in ihrer Verbindung eine Eingriffsnormale. Diese trägt zwei einander gegenüberliegende Zylinderpunkte, von welchen natürlich nur der b näherliegende praktisch als Eingriffspunkt in Frage kommt. Die Gesamtheit der Eingriffsnormalen erfüllt ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid mit der Scheitelerzeugenden a , so daß als Eingriffslinie eine bezüglich a symmetrische Kurve 4. Ordnung auftritt. Man macht sich übrigens leicht klar, daß der zugehörige Fräser von der zum Abstand r_1 gehörigen Parallellfläche jenes einschaligen Drehhyperboloides gebildet wird, das durch Rotation von a um b entsteht; dementsprechend ist der Fräsermeridian die Parallelkurve einer Hyperbel. — Wie weit dieser Fräserteil erstreckt wird, hängt von sonstigen Umständen ab; in Abb. 3 wurde er nur bis zum Kehlkreis ausgeführt.

Für die Rechnung stehen an Daten zunächst der Schraubparameter

$$p = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \operatorname{tg} \mu$$

sowie die Wendelflächenenerzeugende

$$X = v \ (r_1 \leq v \leq r_2), \quad Y = 0, \quad Z = z_0 = \text{konst.} \quad (13)$$

zur Verfügung, ferner die gemäß (5) zu bestimmende Normalenschar

$$\xi = 0, \quad \eta = p, \quad \zeta = -v. \quad (14)$$

Hinsichtlich der Fräserachse b wird auf Grund der Zeichnung über den Achsenabstand c und den Winkel α in geeigneter Weise verfügt, das heißt b soll in einer bestimmten Frontalebene $x = c$ und in der Bahnnormalebene v des Hohlkantenpunktes K ($u = \alpha$, $v = r_1$) liegen, dessen Koordinaten zufolge (3) die Werte

$$x_1 = r_1 \cos \alpha, \quad y_1 = r_1 \sin \alpha, \quad z_1 = z_0 + p \alpha \quad (15)$$

haben. Mittels des Bahntangentenvektors $(-y_1, x_1, p)$ ergibt sich dann die Normalebene v :

$$-y_1 x + x_1 y + p z = p z_1. \quad (16)$$

v muß auch den Punkt $B(c, 0, 0)$ der Fräserachse enthalten; hieraus folgt also $-c y_1 = p z_1$, das ist ausgeführt:

$$-c r_1 \sin \alpha = p (z_0 + p \alpha),$$

woraus sich die noch fehlende Koordinate z_0 jetzt mit

$$z_0 = -\left(p \alpha + \frac{cr_1}{p} \sin \alpha\right) \quad (17)$$

ergibt. Der Achsenwinkel γ berechnet sich dann auf Grund von (16) aus

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{x_1}{p} = \frac{r_1}{p} \cos \alpha. \quad (18)$$

Nachdem nun alle Bestimmungsstücke bekannt sind, kann die Eingriffsgleichung (9) aufgestellt werden, die folgende Gestalt annimmt:

$$u + \frac{z_0}{p} = \frac{B \cos u + C}{p^2 \sin u} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} B &= v^2 + c r_1 \cos \alpha, \\ C &= -(c + r_1 \cos \alpha) v. \end{aligned} \quad (19)$$

Zur Kontrolle kann nachgeprüft werden, daß dieser Bedingung durch die Koordinaten des Eingriffspunktes K ($u = \alpha$, $v = r_1$) genügt wird.

Für die weitere Auswertung müssen dann konkrete numerische Werte vorliegen. Sei etwa in Übereinstimmung mit Abb. 3

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad \operatorname{tg} \mu = 1; \quad c = 2, \quad \alpha = \pi/4.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} p &= 1.5, \quad z_0 = -\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = -2.12091; \\ \operatorname{ctg} \gamma &= \frac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \gamma = 64^\circ 46'. \end{aligned}$$

Die Schlüsselgleichung lautet jetzt

$$u = 1.41394 + \left(\frac{4}{9}v^2 + 0.62854\right) \operatorname{ctg} u - \frac{1.20316 \cdot v}{\sin u}, \quad (20)$$

und die nachstehende Tab. 1 enthält einige daraus berechnete Zahlenwerte, die an Hand von Abb. 3 nachgeprüft werden können:

Tabelle 1.

Schlüsselwerte		Eingriffslinie			Fräsermeridian		
v	u	\bar{X}	\bar{Y}	\bar{Z}	m	r	n
1	45°	0.707	0.707	— 0.943	1.042	1.406	— 0.648 ¹⁰
1.5	$34^\circ 18'$	1.239	0.845	— 1.223	1.286	1.065	— 0.298
2	$36^\circ 06'$	1.616	1.178	— 1.176	1.567	0.680	0.720

Für den anschließenden, den Zylinderschaft erzeugenden Fräsernteil kann auch das allgemeine Schema angewandt werden, wenn man den Schaft als Schraubfläche ansieht, die von der achsenparallelen Erzeugenden

$$X = r_1, \quad Y = 0, \quad Z = v (\geq z_0) \quad (21)$$

überstrichen wird. Die solcherart gefundene Parameterdarstellung der Eingriffslinie

$$\bar{X} = r_1 \cos u, \quad \bar{Y} = r_1 \sin u, \quad \bar{Z} = -c \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{tg} u \quad (22)$$

kann auf Grund geometrischer Vorstellung auch unmittelbar hingeschrieben werden.

¹⁰ Für den Hohlkantenpunkt K ($v = 1$) versagt die Formel (12) für die Achsenkoordinate n des Normalenschnittpunktes, weil b ganz in der Normalebene v liegt, also keinen Schnittpunkt liefert (unbestimmte Form $0:0$). Zieht man statt der Bahnnormalebene des Eingriffspunktes Q jedoch die Tangentialebene des Schraubzylinders $x^2 + y^2 = v^2$ heran, die ja im vorliegenden Falle auch die Normale enthält, so gelangt man zu der äquivalenten Formel $n = (v^2 - c x) : y \sin \gamma$, die natürlich nur für die Wendelfläche angewendet werden darf, hier aber auch im Hohlkantenpunkt K brauchbar bleibt.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß es also durchaus möglich ist, Flachgewindeflanken scharf auszufräsen. Denkt man sich den in Abb. 3 dargestellten Fräser noch durch Spiegelung an seiner Kehlkreisebene verdoppelt, so vermag derselbe sogar vollkommene Flachgewindenuten zu erzeugen; die in Achsenrichtung gemessene lichte Weite derselben beträgt dabei $2|z_0|$. Bis zu welchem Betrage diese Lückenweite durch passende Wahl von x und c in (17) jeweils heruntergedrückt werden kann, ohne Unterschnitte zu verursachen, müßte zum Gegenstand einer eigenen Untersuchung gemacht werden, die wesentlich auf das Hüllgebilde des Systems der Hilfskurven h_0 Bedacht zu nehmen hätte.

4. Sonderfälle.

Auf zwei durch besondere Lage der Fräserachse b ausgezeichnete Sonderfälle sei zum Schluß in aller Kürze hingewiesen.

1. Fingerfräser ($c = 0$, $\gamma = \pi/2$). Die Schlüsselgleichung (9) vereinfacht sich ein wenig, ohne jedoch ihren transzendenten Charakter zu verlieren.

Für Fingerfräser zu steilgängigen Schrauben und Schnecken mit geradem Achsenschnitt hat W. Vogel¹¹ auf Grund des Parallelkreisverfahrens die rechnerischen Grundlagen entwickelt; dieselben stellen sich natürlich auch ganz zwanglos durch Spezialisierung der hier gegebenen allgemeinen Formeln ein. Für ein Trapezgewinde mit dem Flankenwinkel 2ω , dem Flankendurchmesser d und der Lückenweite w gemäß Abb. 4 ist anzusetzen:

$$X = 0, \quad Y = v \cos \omega, \quad Z = e - v \sin \omega \quad \text{mit} \quad e = \frac{1}{2} (d \operatorname{tg} \omega - w). \quad (23)$$

Auf Grund von

$$\xi : \eta : \zeta = p : v \sin \omega : v \cos \omega$$

nimmt die Eingriffsgleichung (9) dann folgende Gestalt an:

$$u = \frac{v(v - e \sin \omega) \sin u + p(e - v \sin \omega) \cos u}{p(v \sin \omega \sin u - p \cos u)}. \quad (24)$$

Nach v aufgelöst, hat man unter Verwendung der Abkürzung $e/p = \varepsilon$:

$$v = \frac{p}{2} [(\varepsilon + u + \operatorname{ctg} u) \sin \omega \pm \sqrt{(\varepsilon + u + \operatorname{ctg} u)^2 \sin^2 \omega - 4(\varepsilon + u) \operatorname{ctg} u}]. \quad (25)$$

Um einen Anhaltspunkt für die zu verwendenden u -Werte zu haben, die durchwegs klein sind, kann man in (24) $\sin u$ durch u und $\cos u$ durch 1 ersetzen, womit man zu einem bestimmten v den Näherungswert

$$u \approx \frac{p(v \sin \omega - e)}{p^2 + v^2 - e v \sin \omega} \quad (26)$$

erhält. Anschließend ergibt sich auf Grund von (3) die Darstellung der Eingriffslinie:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -v \cos \omega \sin u \approx -u v \cos \omega, \\ \bar{Y} &= v \cos \omega \cos u \approx v \cos \omega, \\ \bar{Z} &= e - v \sin \omega + p u. \end{aligned} \quad (27)$$

¹¹ W. Vogel: Analytische Berechnung des Fingerfräserprofils für steilgängige Schrauben und Schnecken mit geradem Achsenschnitt. Z. Ver. deutsch. Ing. 78, 156—158 (1934), s. auch 1222.

Der im Abstand $m = \bar{Y}$ gemessene Parallelkreisradius r des Fräasers ergibt sich dann gemäß (11) aus $r^2 = \bar{X}^2 + \bar{Z}^2$.

Für das Flachgewinde ($\omega = 0$, $e = -w/2$) vereinfacht sich die Schlüsselgleichung (24) auf

$$v^2 = p \left(\frac{w}{2} - pu \right) \operatorname{ctg} u \quad \text{und} \quad u \approx \frac{pw}{2(p^2 + v^2)}. \quad (28)$$

In beiden Fällen ist ein scharfes Ausfräsen der Hohlkanten nicht möglich, weil die Fräserachse in keiner Normalebene der betreffenden Schraublinien liegt.

2. Parallele Achsen ($\gamma = 0$). Die praktisch wohl nur selten mögliche Anordnung einer zur Schraubachse a parallelen Fräserachse b würde eine wesentlich vereinfachte Eingriffsgleichung mit sich bringen; aus (8) folgt nämlich mit $\gamma = 0$

$$c (\xi \sin u + \eta \cos u) + p \zeta = 0, \quad (29)$$

eine Gleichung, deren Auflösung nach u keine Schwierigkeiten bereitet. Mit Rücksicht auf (6) ist diese Gleichung der Ausdruck für die Bedingung

$$c \eta + p \bar{\zeta} = 0, \quad (30)$$

welche geometrisch bedeutet, daß die Eingriffsnormalen $n(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ sämtlich normal zu dem festen Vektor $l(0, c, p)$ sind: Die Eingriffslinie ist mithin identisch mit der Eigenschattengrenze der Schraubfläche für die Lichtrichtung ¹².

(Eingegangen am 20. Mai 1952.)

Buchbesprechungen.

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von K. Federhofer. Mit 35 Textabb. und 26 Zahlentafeln, XII, 179 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 84.—, sfr. 23.50, \$ 5.50, DM 23.—.

Die Dynamik gekrümmter Stäbe ist in den einschlägigen Fachbüchern über Schwingungsprobleme bisher verhältnismäßig wenig berücksichtigt worden. Meist wurde nur der geschlossene Kreisring, dessen Querschnitt eine Kreisfläche oder ein schmales Rechteck ist, behandelt. Das Erscheinen des vorliegenden Buches, in welchem die Grundgleichungen der Eigenschwingungen in möglichster Allgemeinheit aufgestellt werden, ist daher sehr zu begrüßen.

Die Untersuchungen stützen sich auf das Hookesche Elastizitätsgesetz; ferner wird vorausgesetzt, daß die Querschnittsabmessungen klein gegenüber dem Krümmungshalbmesser des Stabes sind, so daß die Naviersche Verteilung der Biegespannungen beibehalten werden darf. Es wird weiters — ausgenommen Abschnitt H — vorausgesetzt, daß die Querschnittsform während der Stabschwingung unverändert bleibt. Als Querschnitt wird im allgemeinsten Fall ein beliebiger, dünnwandiger offener Querschnitt gewählt, wobei die Bogenebene keineswegs Hauptebene sein muß. Da bei den Drillungsschwingungen Querschnittverwölbungen auftreten, deren Ausbildung behindert wird, ist ein bezüglicher Ausbau der Theorie notwendig gewesen. Es werden nur freie Schwingungen in Untersuchung gezogen.

Zu den interessantesten Abschnitten des Buches zählt gleich der Abschnitt A über die Kinematik der Biegung und Drillung eines Stabes mit anfänglicher räumlicher Krümmung. Die Anwendung der vektoriellen Schreibweise bietet gute Übersichtlichkeit. Über die bisherigen Darstellungen hinausgehend, berücksichtigt der Autor noch Stablängenänderungen, so daß neben Biegungs- und Drillungsschwingungen auch Längsschwingungen erfaßt werden können. Die weiteren Abschnitte betreffen dann Stäbe mit kreisförmiger Zentrallinie. Im Abschnitt B werden die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen des räumlich schwingenden Kreisbogens mit Hilfe der Variationsmethode entwickelt. Das Verfahren bietet den Vorteil, daß neben den Differentialgleichungen der Eigenschwingungen auch die vollständigen Randbedingungen erhalten werden.

¹² Die zur Fräserachse b gehörige Polare b^* in bezug auf den in Fußnote 8 erwähnten linearen Normalenkomplex ist im vorliegenden Fall eine Ferngerade, nämlich jene der zur Lichtrichtung l normalen Stellung.

Die Abschnitte C und D behandeln Sonderfälle der Querschnittsform mit den zugehörigen Schwingungsgleichungen, der Abschnitt E ist dem Grenzfall des geraden Stabes gewidmet.

In den bisher genannten Abschnitten sind die Stabquerschnitte als unveränderlich vorausgesetzt worden; im Abschnitt F werden nun Kreisbogenträger berechnet, deren Querschnitte entlang der Bogenachse veränderlich sind. Im Abschnitt G wird der Einfluß einer Querbelastung untersucht und hierbei auch das Mitschwingen des diese Belastung hervorruhenden Mediums berücksichtigt. Der Abschnitt H behandelt den unter Innendruck stehenden Hohlreifen; die beim Schwingen auftretenden Änderungen der Querschnittsform werden hier berücksichtigt. Im Abschnitt I wird schließlich untersucht, welche Änderungen die für den Kreisbogenträger errechneten Schwingungsfrequenzen im Falle einer von der Kreisform abweichenden Bogenform erfahren.

Der Verfasser konnte für sein Buch eine Reihe von eigenen Arbeiten verwenden, die wesentlich zur Weiterentwicklung der Theorie beigetragen haben. Sein Werk ist für den Wissenschaftler sehr wertvoll und es bietet ihm auch eine Fülle von Anregungen; hervorzuheben sind die umfassenden Literaturangaben. Für den Studierenden stellt das Buch einen erwünschten Lehrbehelf dar. Auch für den praktisch tätigen Ingenieur wird es von Nutzen sein: er findet dort die notwendigen Berechnungsverfahren und die beigegebenen Zahlentafeln und graphischen Darstellungen werden ihm das Auswerten der Lösungsergebnisse erleichtern.

K. Girkmann, Wien.

Ebene und räumliche Rahmentragwerke. Von V. Kupferschmid. Mit 252 Textabb., VII, 196 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. Geb. S 174.—, sfr. 37.—, \$ 8.50, DM 35.70.

Die Untersuchung von Rahmentragwerken wird nach dem Gedankengang der Deformationsmethode von Ostenfeld unter Heranziehung des Verfahrens der algebraischen Momentenverteilung von Cross ausführlich dargelegt. Bekanntlich gestattet diese Verbindung eine wesentliche Verminderung der Zahl der mittels Gleichgewichtsbedingungen zu ermittelnden unbekannten Verschiebungsgrößen, da die Knotendrehwinkel wegfallen. Während Knotenpunkte, in denen lauter gekrümmte Stäbe anlaufen, zu ihrer Festhaltung je zwei zusätzliche Stützstäbe und daher weiterhin zwei Verschiebungskomponenten bedingen, vermindert sich diese Zahl erheblich bei geraden Stäben und Vernachlässigung der Längenänderungen zufolge der Normalkräfte.

Anhand der im Bauwesen verwendeten Systeme wird insbesondere auf die Möglichkeiten zur Kontrolle und Vereinfachung der ziffernmäßigen Behandlung hingewiesen. So lassen sich beispielsweise die Rahmentragwerke mit nur zwei parallelen biegungssteifen Stabzügen (zweistielige Stockwerkrahmen und Vierendeelträger mit parallelen Gurten) mit nur zwei Momentenausgleichsrechnungen untersuchen. Bei räumlichen Rahmentragwerken zeigt der Verfasser, daß auch dann, wenn zueinander parallele Stäbe durch einen biegungssteifen Ring in der zu ihnen senkrechten Ebene verbunden sind (z. B. Kaminkühlerunterbauten), die Berechnung nach Cross durchgeführt und überdies durch Wahl besonderer Querschnitte für die parallelen Stäbe merklich vereinfacht werden kann.

Eine kurz gestreifte Verallgemeinerung des Crossschen Ausgleichsverfahrens durch Schnitte in „Hauptknoten“, die das ganze System in vorher berechenbare Untersysteme zerlegen, und dementsprechenden neuen Steifigkeiten und Übergangszahlen bringt bei sehr verwickelten Systemen Vorteile, die ein durchgerechnetes Beispiel verdeutlichen könnte. Bei Stäben mit veränderlichem Querschnitt wird auf die bekannten Tabellen für α und β in Guldán: Rahmentragwerke und Durchlaufträger hingewiesen; die mit diesen Größen durchgeführte Berechnung der Stabfestwerte (Steifigkeiten) kann bei Verwendung der ebendort mitgeteilten Tafeln für a und b erspart werden. Auch könnte die Gegenseitigkeit der Festhaltekräfte für die Grundverschiebungen als Kontrollmöglichkeit bei der Behandlung der Beispiele betont werden. Dies sowie die Ausmerzung von Druckfehlern, die allerdings bei aufmerksamem Lesen sofort auffallen und daher nicht stören, sei als Wunsch für eine weitere Auflage genannt.

Das handliche und sorgfältig ausgestattete Buch, dessen Darlegungen durch 27 instruktive Beispiele unterstützt werden, wird nicht nur vom Anfänger, sondern auch vom Praktiker mit Gewinn gelesen werden.

W. Mudrak, Graz.

Dampferzeugung. Dampfkessel, Feuerungen. Theorie, Konstruktion, Betrieb. Von M. Ledinegg. Mit 415 Textabb., XII, 427 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. Geb. S 396.—, sfr. 81.80, \$ 18.80, DM 79.—.

Der Verfasser trägt an der Technischen Hochschule in Wien Kesselbau vor und bringt im vorliegenden Buch eine umfassende Darstellung in klarer und präziser Form, so daß auf dem vorhandenen Raum eine große Zahl interessanter, bisher nicht veröffentlichter Zeichnungen, theoretischer Darstellungen und Diagramme Platz fanden.

Der Stoff ist in 16 Kapitel unterteilt:

Dampfkessel: Neben den heute noch gebauten Großwasserraumkesseln sind insbesondere die neuesten Bauarten der Wasserrohr- und Sonderkessel beschrieben, wobei die große Zahl ausländischer und überseeischer Konstruktionen hervorzuheben ist; Vor- und Nachteile der Bauarten sind eingehend besprochen.

Feuerungen: Rost- und Staubfeuerungen mit Maßtabellen.

Brennstoffe: Hier sind auch die österreichischen Kohlen angeführt.

Wasserdampf: Der Einfluß der Speisearbeit auf die Vorwärmung wird berechnet.

Wirkungsgrade und Wärmeverluste: Hervorzuheben sind die Diagramme zur Vorausberechnung des Verlustes durch Unverbranntes.

Wärmeübergang: Hier sind übersichtlich alle für die Berechnung notwendigen Unterlagen angegeben, so daß die Benützung von Spezialwerken entfällt. Für querangeströmte Rohre sind in Zahlentafel 61 die Abminderungszahlen des Wärmeüberganges bei weniger als 10 Rohrreihen noch nach Reiher angeführt. Hervorzuheben ist die übersichtliche Gegenüberstellung der Wärmeübergangswerte der verschiedenen Autoren sowie die Darstellung der Flammenstrahlung und Brennkammerberechnung. Die Verfasser der bisherigen Bücher haben jeweils eine neue Theorie der Brennkammerberechnung entwickelt, die Theorie von Ledinegg muß als die klarste angesehen werden.

Zugbedarf: Interessant ist die Gegenüberstellung von Wärmeübergang und Zugverlust.

Wärmetechnische Berechnung: Die graphische Methode der Übertragung des J - p -Diagramms in das J - t -Diagramm ist interessant dargestellt und an Beispielen erläutert.

Wasserumlauf: Dieses Kapitel zählt zu den besten des Werkes. In klarer und exakter Weise sind die meisten der vorkommenden Probleme des Umlaufes und der Stabilität der Strömung in Originaldarstellungen erläutert.

Speicherfähigkeit: Hier wird auch die zulässige Druckabsenkung berechnet.

Nach den Kapiteln Dampfraum und Speisewasseraufbereitung folgt:

Feuerungstheorie: Die Verbrennungszeit von Kohlenstaub wird nach fünf Autoren behandelt, hierzu bringt der Verfasser seine überzeugende Darstellung mit klaren Diagrammen.

Einzelteile: Neben der Beschreibung der Einzelteile des Kessels werden auch die Betriebschäden und deren Ursachen besprochen. Zu erwähnen ist die Beschreibung und Berechnung des Kesselgerüsts.

Werkstoff und Festigkeitsberechnung: Hervorzuheben sind die reichhaltigen Angaben über Baustoffe, die Gegenüberstellung der österreichischen und deutschen Werkstoff- und Bauvorschriften und die Sammlung der in der Literatur verstreuten Festigkeitsprobleme.

159 Zahlentafeln ergänzen den Text. Die meisten Normen sind auszugsweise angeführt. Da noch Literaturstellen aus dem Jahre 1951 angeführt sind, bringt das Buch den neuesten Stand. Bei dem großen Stoff (686 Gleichungen) sind nur sehr wenige Druckfehler stehengeblieben, so z. B. Seite 271, Gleichung (445), und Seite 360, Gleichung (588), letzte Zeile.

Bei den großen Vorzügen des Buches kann mit einer baldigen Neuauflage gerechnet werden. Hierbei wäre die Einbeziehung der Elektrokessel, der Öl- und Gasfeuerung sowie einiger Hilfsbetriebe, wie Speisepumpen, Ventilatoren, Entstaubung, wünschenswert.

Das vorliegende Buch bringt die bisher beste und umfassendste Darstellung des Kesselbaues in deutscher Sprache. Der Erbauer, Besteller und Benützer von Kesseln findet alles Wissenswerte; dem Studierenden an Technischen Hochschulen gewährt es den besten Einblick.

P. Gili, Graz.

Berichtigung.

Österreichisches Ingenieur-Archiv, Band VI (1952). H. Craemer. Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchskörper, betrachtet auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

S. 153, Gleichung (34) lies: $P = (s - i + 1) \sigma_i$, statt $P = (s - i - 1) \sigma_i$.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

In den letzten Wochen erschienen:

Rahmentragwerke und Durchlaufträger. Von Dr. Ing. habil. **R. Guldán**, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Fünfte, unveränderte Auflage. Mit 435 Textabbildungen und 58 Tafeln. XV, 359 Seiten. Lex.-8°. 1952. Ganzleinen S 168.—, DM 33.60, \$ 8.—, sfr. 34.80

Aus den Besprechungen der vierten Auflage:

„... Das vorliegende Werk ist überall dort am Platze, wo — sei es im Bauwesen, Maschinenbau oder Schiffbau — Rahmenkonstruktionen mit wirtschaftlichen Abmessungen zu entwerfen sind, die heute zu den am meisten angewandten Bauformen gehören. Vor allem wird das Buch aber dem praktisch tätigen Bauingenieur eine wertvolle Hilfe leisten, wenn es sich darum handelt, entweder beim Neubau wettbewerbsfähige Bauformen wirklichkeitsgetreu zu berechnen und zu bemessen, oder sich aber bei dem zur Zeit ebenso wichtigen Umbau und Wiederaufbau in gegebene unregelmäßige Umrisse und Einteilungen richtig und sparsam einzufügen.“ *VDI-Zeitschrift*

Eisenbahnoberbau. Die Grundlagen des Gleisbaues. Von Dipl.-Ing. Dr. **R. Hanker**, o. Professor an der Technischen Hochschule Wien. Mit 258 Textabbildungen. VIII, 256 Seiten. Lex.-8°. 1952. Ganzleinen S 216.—, DM 43.20, \$ 10.30, sfr. 44.70

Ausgehend von der Tragfähigkeit des Gleises werden die Bedingungen erörtert, welche Schienen, Schwellung, Bettung, Befestigungsmittel und Laschenverbindungen (sowie das geschweißte Gleis) erfüllen müssen, damit den Fahrzeugen ein festgefügt, ausreichend tragfähiges Gleis zur Verfügung steht. Dazu kommen die Voraussetzungen für eine sichere Führung der Fahrzeuge. Das Verhältnis „Rad—Schiene“ sowie „Fahrzeug—Gleis“ nimmt einen breiten Raum ein, um den Gleisbauer instandzusetzen, sich mit dem Fahrzeugbauer zum Nutzen des Fortschrittes im Zusammenwirken von Fahrzeug und Gleis zu verständigen.

Gewinnbeteiligung. Internationale Erfahrungen. Wirtschaftstheoretische Untersuchungen. Wirtschaftspolitische Erkenntnisse. Von Prof. Dr. Dr. **H. Bayer**, Innsbruck. VI, 164 Seiten. 1952. S 60.—, DM 12.—, \$ 2.90, sfr. 12.50

Das Problem der Zusammenarbeit von Arbeitgeber und Arbeitnehmer im Betrieb steht im Mittelpunkt der wirtschafts- und sozialpolitischen Diskussion und wurde nunmehr in verstärktem Maße auch vom internationalen Gesichtspunkte aus seitens der OEEC und anderer Stellen aufgerollt. Im Rahmen dieses Gesamtproblems behandelt die Arbeit die Gewinnbeteiligung und die Anwendung verwandter Lohnsysteme in Deutschland, England, Frankreich, Osteuropa, Südamerika und USA.

Die Rentabilität der Produktivitätssteigerung. Ein Beitrag zur Lehre der Rechenhaftigkeit der Wirtschaft. Von Oberbaurat Dipl.-Ing. **B. M. Gerbel**, Wien. Mit 4 Textabbildungen und 1 Ausschlagstabelle. V, 48 Seiten. 1952. Steif geheftet S 28.—, DM 5.60, \$ 1.35, sfr. 5.80

Dieses Buch des durch seine früheren Arbeiten (Die Rentabilität industrieller Anschaffungen, Springer-Verlag, Wien 1947; Kraft- und Wärmewirtschaft in der Industrie, Julius Springer, Berlin 1928; u. v. a.) bekannten Verfassers behandelt die aktuelle Frage der Produktivitätssteigerung vom Gesichtspunkt der durch sie erzielbaren volks- und privatwirtschaftlichen Erfolge.

Kurzgefaßte Elektrizitätswirtschaftslehre. Von Dr. techn. **E. Königshofer**, Wien. Mit 17 Textabbildungen. VII, 127 Seiten. 1952. Steif geheftet S 48.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

Das Buch führt den Leser in das Elektrizitätswirtschaftliche Denken ein: Es werden die von der Technik der Elektrizitätsversorgung herangezogenen Mittel besprochen und die einschlägigen elektrotechnischen Begriffe, z. B. Blindstrom usw., in einer auch für den Nichtfachmann verständlichen Weise erläutert. Von den Grundlagen der Elektrizitätsversorgung ausgehend, wird der Leser in die Probleme der Elektrizitätswirtschaft, darunter auch in das Tarifwesen, eingeführt. Schließlich werden Organisationsfragen behandelt.

Probleme der Kraftwasserwirtschaft in Mitteleuropa. Von Dipl.-Ing. Dr. **O. Vas**, Wien. Mit 27 Textabbildungen. III, 60 Seiten. 1952. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes, Heft 22.) Steif geheftet S 16.—, DM 3.20, \$ —.75, sfr. 3.25

Wege und Ziele der österreichischen Elektrizitätswirtschaft. Von Dipl.-Ing. Dr. **O. Vas**, Wien. Mit 14 Textabbildungen und 24 Tabellen. IV, 110 Seiten. 1952. (Erweiterter Sonderabdruck aus Ö. Z. E., Österreichische Zeitschrift für Elektrizitätswirtschaft Heft 1, 2, 3 und 5, Jahrg. 5 [1952].) Steif geheftet S 37.50, DM 7.50, \$ 1.80, sfr. 7.65

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

In den letzten Wochen erschienen:

Die Verbrennungskraftmaschine. Herausgegeben von Professor Dr. Hans List, Graz.
Band 4. Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine.

Teil 3: Der Viertakt. Ausnützung der Abgasenergie für den Ladungswechsel. Von Prof. Dr. Hans List, Graz. Mit 172 Abbildungen im Text. VIII, 175 Seiten. 4°. 1952.

Steif geheftet S 180.—, DM 36.—, \$ 8.60, sfr. 37.30

Früher erschienen:

Teil 1: Grundlagen. Die rechnerische Behandlung der instationären Strömungsvorgänge am Motor. Von Prof. Dr. Hans List, Graz, und Gaston Reyl, Graz. Mit 156 Abbildungen im Text, 2 Tafeln und 4 Tab. XI, 239 Seiten. 4°. 1949. Steif geheftet S 239.—, DM 48.—, \$ 11.40, sfr. 49.60

Teil 2: Der Zweitakt. Von Prof. Dr. Hans List, Graz. Mit 384 Abbildungen im Text. X, 370 Seiten. 4°. 1950. Steif geheftet S 347.—, DM 69.—, \$ 16.50.—, sfr. 72.—

Elektrische Maschinen. Eine Einführung in die Grundlagen. Von Professor Dr.-Ing. Theodor Bööfeld, Berlin, und Professor Dr. techn., Dr.-Ing., Dr. phil. Heinrich Sequenz, Wien. Fünfte Auflage mit Ergänzungen. Mit insgesamt 655 Abbildungen. XXVI, 502 Seiten. Lex.-8°. 1952.
S 127.50, DM 25.50, \$ 6.10, sfr. 26.20, Ganzleinen S 142.—, DM 28.50, \$ 6.80, sfr. 29.20

Aus den Besprechungen der vierten Auflage:

„... Das vorliegende Buch führt leicht faßlich in die wissenschaftlichen Grundlagen der elektrischen Maschinen und Transformatoren ein. Es bringt in einheitlicher Darstellung die allgemeinen Grundbegriffe, den Aufbau, das Betriebsverhalten und Anwendung der elektrischen Maschinen... Es ist ein ausgezeichnetes Lehrbuch vor allem für den Hochschulunterricht.“

ETZ

Die Wicklungen elektrischer Maschinen. Von Heinrich Sequenz, Dipl.-Ing., Dr. techn., Dr.-Ing., Dr. phil., o. Professor a. D. und Privatdozent der Technischen Hochschule in Wien, korresp. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. In vier Bänden.

Erster Band: Wechselstrom-Ankerwicklungen. Mit 408 Textabbildungen. XX, 365 Seiten. Lex.-8°. 1950.
S 189.—, DM 37.—, \$ 9.—, sfr. 39.—, Ganzleinen S 208.—, DM 40.—, \$ 9.90, sfr. 42.50

Zweiter Band: Wenderwicklungen. Mit 423 Textabbildungen. XVI, 331 Seiten. Lex.-8°. 1952.

S 270.—, DM 54.—, \$ 12.90, sfr. 56.—, Ganzleinen S 285.—, DM 57.—, \$ 13.50, sfr. 59.—

Dritter Band: Wechselstrom-Sonderwicklungen. Vierter Band: Herstellung der Wicklungen.

Erscheinen bis Ende 1953

Niederdruck-Stromrichterventile. Versuch einer Darstellung von Wirkungsweise und Betriebseigenschaften als Folge der konstruktiven Ausführung. Von Dr.-Ing. Hans v. Bertele, Purley, Surrey, England. Privatdozent an der Technischen Hochschule, Wien. Mit 149 Textabbildungen. XII, 239 Seiten. 1952.
Ganzleinen S 195.—, DM 39.—, \$ 9.30, sfr. 40.—

Niederdruck-Stromrichterventile haben sich in den letzten zwei bis drei Jahrzehnten zu einem universell verwendeten Bestandteil der Elektrotechnik entwickelt, der für viele Energieumformungs- und Regelaufgaben unersetzlich geworden ist. Der Verfasser gibt nicht nur eine systematische Darstellung dieses in neuester Zeit so bedeutungsvoll gewordenen Teilgebietes der Elektrotechnik nach dem letzten Entwicklungsstand, sondern zeigt auch den Weg zur planmäßigen Überwindung von Schwierigkeiten bei der Projektierung neuer Anlagen und Anwendungsmöglichkeiten, die wegen des nicht ganz einfachen Zusammenhanges von Leistungsvermögen und besonderen Betriebsbedingungen der einzelnen Gefäße auftreten.

Nichtmetallische anorganische Überzüge. Von Willi Machu, Dipl.-Ing., Dr. techn. habil., Professor an der Universität Fouad I., Cairo, Ägypten. Mit 153 Textabbildungen. XII, 404 Seiten. Lex.-8°. 1952.
Ganzleinen S 285.—, DM 57.—, \$ 13.50, sfr. 59.—

Die nichtmetallischen anorganischen Überzüge auf Metallen besitzen sowohl für Zwecke des Korrosionsschutzes als auch der Verschönerung von Metallgegenständen eine große praktische Bedeutung. Im vorliegenden Buche sind erstmalig praktisch sämtliche technisch bedeutsamen Überzugsverfahren für alle technisch verwendeten Metalle und Legierungen nach einheitlichen Gesichtspunkten zusammengefaßt und damit ein sowohl für den Wissenschaftler als auch Techniker sehr wertvoller Ratgeber geschaffen worden.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria